

Übung zum Grundkurs Logik

Günther Eder
Institut für Philosophie
Universität Wien



<http://www.youtube.com/watch?v=kQFKtI6gn9Y>

ACHTUNG!

Bei diesem Dokument handelt es sich NICHT um ein offizielles (oder auch nur halb-offizielles) Skriptum zu irgendeiner Lehrveranstaltung.

Das Dokument ist nur eine Zusammenstellung von Erinnerungsblättern, die ich in vergangenen Semestern geschrieben habe (angereichert um ein paar Bildchen).

Vielleicht hilft es irgendwem dabei, den Grundkurs Logik heil zu überstehen.

(Für Hinweise auf Fehler, fahrlässige Auslassungen, etc. bin ich natürlich trotzdem dankbar.)

Inhaltsverzeichnis

1	Aussagenlogik – AL	7
1.1	Die Sprache der Aussagenlogik	7
1.2	Semantik der AL	9
1.2.1	Exkurs 1: Funktionale Vollständigkeit	12
1.2.2	Exkurs 2: Normalformen	12
1.3	Semantischer Folgerungsbegriff	17
1.4	Syntaktische Folgerungsbegriffe	21
1.4.1	Axiomatischer Kalkül nach Frege-Lukasiewicz	21
1.4.2	Exkurs: Das Deduktionstheorem	23
1.4.3	Kalkül des natürlichen Schließens	23
1.4.4	Übungsbeispiele	32
1.4.5	Der Resolutionskalkül	32
1.5	Metatheorie der AL	36
1.5.1	Exkurs: Beweis Vollständigkeitssatz	39
2	Prädikatenlogik – PL	41
2.1	Die Sprache der Prädikatenlogik	41
2.1.1	Übungsbeispiele	45
2.2	Semantik der PL	47
2.2.1	Übungsbeispiele	52
2.3	Kalkül des natürlichen Schließens für PL	53
2.3.1	Übungsbeispiele	59
3	Anhang	61
3.1	Lösungen zu den Übungsbeispielen	61
3.1.1	Lösungen zu den Beispielen aus Abschnitt 1.4.4	61
3.1.2	Lösungen zu den Beispielen aus Abschnitt 2.1.1	66
3.1.3	Lösungen zu den Beispielen aus Abschnitt 2.2.1	67

Vorbemerkung

Logik Lernen ist wie im Wesentlichen wie eine **neue Sprache** Lernen. Und das ist immer mühsam! Noch mühsamer ist es in diesem Fall, weil es sich bei den Sprachen, die wir behandeln werden um **formale Sprachen** handelt. Man wird mit viel neuer Terminologie, neuen Zeichen und Methoden – z.T. auch mathematischen – konfrontiert. Und das ist anstrengend! Mein Rat ist:

Nur nicht die Nerven weghauen und am Ball bleiben!

Das bedeutet vor allem: Viel Üben! Vor allem in den ersten paar Einheiten ist es wichtig am Ball zu bleiben. Wichtig ist aber auch – und das sollte man sich immer vor Augen halten: Wir machen in der Logik nichts, was wir nicht ständig (implizit) machen, wenn wir miteinander reden und streiten. Der Grad an Allgemeinheit den man in der Logik in der Regel verfolgt, macht es zwar notwendig, dass man neue Zeichen zur Abkürzung, Variablen etc. einführt – aber wie gesagt: Im Prinzip besprechen wir hier nichts, was wir nicht alle ständig implizit anwenden – nämlich Argumente, Schlussregeln usw. In der Logik beschäftigen wir uns mit diesen Dingen nur in einer präziseren und allgemeineren Form als sonst.

Logik ist, ganz grob, **die Lehre vom korrekten Schließen**. Da stellt sich natürlich sofort die Frage: was *ist* ein korrekter oder gültiger Schluss oder ein gültiges Argument? Wieder ganz grob kann man sagen (und wir werden uns das noch genauer ansehen). Als erste Annäherung bietet sich Aristoteles Charaktisierung an:

Ein Syllogismus ist eine Rede, in der, wenn etwas gesetzt ist, etwas anderes als das Gesagte notwendig folgt aufgrund des Vorausgesetzten.

Logisch gültige Argumente sind also solche, wo die Prämissen, falls sie wahr sind, die Wahrheit der Konklusion **garantieren**. Etwas genauer: wo die Prämissen, falls wahr, mit Notwendigkeit die Wahrheit der Konklusion garantieren – **aufgrund ihrer logischen Form**. Hier ein Beispiel für ein gültiges Argument:

P1. Max mag Ida oder Fred mag Ida.

P2. Max mag Ida nicht.

∴

C. Also mag Fred Ida.

Und hier noch ein Beispiel:

P1.' Heut gehe ich ins Kino oder ich betrinke mich.

P2.' Ins Kino gehe ich nicht.

∴

C. ' Also betrinke ich mich heute.

Offensichtlich haben beide Argumente etwas gemeinsam – nämlich ihre **Form**, die man etwa so notieren könnte:

P1.” P oder Q

P2.” Nicht-P

∴

C.” Also Q

Offensichtlich haben wir es hier mit einem gültigen Argument-Schema zu tun – d.h. alle Argumente, die diesem Schema genügen, sind gültig. Eines der Kerngeschäfte der Logik besteht nun darin, allgemeine Kriterien anzugeben, wie man die gültigen Schemata von den ungültigen trennen kann.

Die **Aussagenlogik** beschäftigt sich mit (Un-)Gültigkeit von Argumenten, insofern sich diese auf ihre aussagenlogische Struktur bezieht! Was das ganz genau heisst, wird dann Thema der nächsten Einheiten sein – aber ganz grob: Die kleinsten semantisch signifikanten Einheiten sind hier **ganze Sätze**! Ein aussagenlogisch nicht weiter zerlegbarer Satz beinhaltet keine der (aussagen-)logischen Konstanten – d.h. kein “und”, “nicht”, “oder”, etc.

Das Geschäft der **Prädikatenlogik** besteht dann darin, Argumente auch daraufhin zu untersuchen, ob sie (un-)gültig sind, wenn man diese aussagenlogischen Einheiten noch weiter – in sogenannte **sub-sententiale Bestandteile** – zerlegt. Also in semantisch signifikante Bestandteile von Sätzen wie **Namen**, ein- oder mehrstellige **Prädikate**, etc.. Vor allem repräsentiert man hier auch sogenannte quantifikatorische Ausdrücke wie “Alle Menschen ...”, “Einige (d.h. mindestens ein) Student ...” usw. Wieso man so eine “feinere” Analyse braucht, ist schnell erklärt: Man kann sich leicht davon überzeugen, dass eine aussagenlogische Analyse von Sätzen oft nicht fein genug ist, um die Gültigkeit bestimmter Argumente zu erfassen. Hier ein Beispiel:

P1. Irgendjemand in diesem Raum mag alle Existentialisten.

∴

C. Jeder Existentialist wird von irgendjemandem in diesem Raum gemocht.

Weder **P1.** noch **C** haben eine relevante aussagenlogische Struktur. Keiner der beiden Sätze ist die Negation eines Satzes, die Konjunktion zweier Sätze, etc. Die erste Prämisse kann also die Wahrheit der Konklusion sicherlich nicht *allein aufgrund ihrer aussagenlogischen Struktur* garantieren. Trotzdem ist das Argument offenbar gültig! D.h. hier müssen wir eine feinere Analyse ansetzen, um erklären zu können wie die Wahrheit von **P1** die Wahrheit von **C** garantiert aufgrund der “Form” dieser Sätze.

Wir werden uns aber nicht nur damit beschäftigen, was es **heisst**, dass ein Argument aussagen- oder prädikatenlogisch gültig oder ungültig ist – sondern, und vor allem, auch damit, wie man das **überprüfen** kann! Insbesondere werden wir uns rein syntaktische Methoden ansehen, mit denen wir nachweisen können, dass ein Argument gültig ist. Ein wichtiger Teil der Logik besteht darin, zu lernen, was ein **Kalkül** ist. D.h. zu lernen, wie man mit Hilfe von **exakt formulierten syntaktischen Regeln** aus bestimmten Prämissen eine bestimmte Konklusion herleiten kann – bloß mit Hilfe von **Zeichenmanipulationsregeln**!

Kapitel 1

Aussagenlogik – AL

1.1 Die Sprache der Aussagenlogik

Die Sprache der Aussagenlogik besteht aus unendlich vielen **Aussagebuchstaben** $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, \dots$ und den aussagenlogischen Verknüpfungen – den **Junktoren** – \neg (“nicht”), \wedge (“und”), \vee (“oder”), und \rightarrow (“wenn..., dann...”) und den Klammern “(” und “)”. Die Wohlgeformtheitsbedingungen für unsere aussagenlogische Sprache, die uns sagen, wann ein Ausdruck, der aus Partikeln unserer Sprache besteht, rechtmäßig gebildet ist, sind ein Beispiel für eine **rekursive** (oder **induktive**) **Definition**.

Die Definition besteht aus 3 Teilen:

- Definition 1.**
- i. Jeder Aussagebuchstabe ist eine wohlgeformte Formel (eine WFF)*
 - ii. Falls α und β wohlgeformte Formeln sind, so auch $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ und $(\alpha \rightarrow \beta)$*
 - iii. Nichts sonst ist eine wohlgeformte Formel. Jede wohlgeformte Formel muss sich durch endlich-ofte Anwendung der Regeln i. und ii. ergeben.*

Z.B. sind die Zeichenfolgen $(\neg p \wedge p)$, $((\neg p \rightarrow) \rightarrow q)$ und $(q \vee \neg s_{17})$ wohlgeformte Formeln – nicht aber $p \wedge \neg p$ und t_{17}

Es ist zu beachten, dass die griechischen Buchstaben α, β in der obigen Definition der Wohlgeformtheitsbedingungen **Metavariablen** für Zeichenfolgen sind, also nicht zum eigentlichen Bestand der Objektsprache gehören: Dazu gehören nur die oben genannten Zeichen, nämlich Aussagebuchstaben, die Junktoren und Klammern.

Ab einem gewissen Zeitpunkt ist man meistens nicht mehr so genau mit den Klammern; äussere Klammern werden meistens weggelassen (d.h. man schreibt etwa $p \wedge \neg p$ statt dem offiziellen $(p \wedge \neg p)$ – was der Lesbarkeit sehr zuträglich ist. Oft

benutzt man noch zusätzliche Klammerersparungsregeln (“Punkt-vor-Strich-Regeln”) und setzt z.B. fest, dass \wedge stärker bindet als \vee und dieses wiederum stärker als \rightarrow .

Rekursive Definitionen

Die allgemeine Form so einer rekursiven Definition ist also:

- i. Alle Basiselemente gehören zu einer bestimmten Klasse X .
- ii. Wenn dieses und jenes zur Klasse X gehört, dann ist auch das Ding, das ich durch Anwendung irgendeiner Operation F auf dieses und jenes erhalte in X .
- iii. Nichts sonst ist in X .

Das Paradebeispiel sind die natürlichen Zahlen: In diesem Fall gibt es ein Basiselement, die Zahl 0; Die Operation, die wir anwenden, ist die sogenannte **Nachfolgeroperation** S , die, angewendet auf eine Zahl, deren Nachfolger ausgibt; Die Klasse der natürlichen Zahlen ist dann genau die Klasse $X = \mathbb{N}$, die

- i. 0 enthält und
- ii. für jedes n auch $S(n)$ (den Nachfolger von n) enthält und
- iii. nichts sonst enthält (also nichts, was sich nicht durch endlich ofte Anwendung der Nachfolgeroperation “erzeugen” lässt).

Induktion über den Formelaufbau

So eine rekursive Definition gibt uns auch eine **Beweismethode** an die Hand, mit Hilfe derer wir beweisen können, dass eine bestimmte Eigenschaft auf alle wohlgeformten Formeln zutrifft. Können wir nämlich zeigen, dass eine Eigenschaft auf alle atomaren Aussagezeichen zutrifft und dass sie auf eine Formel $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ und $(\alpha \rightarrow \beta)$ zutrifft, FALLS sie auf α und β zutrifft, so haben wir damit gezeigt, dass diese Eigenschaft auf ALLE wohlgeformten Formeln zutrifft, denn andere gibt es nach unseren Wohlgeformtheitsbedingungen nicht. Diese Beweismethode nennt man auch **Induktion über den Formelaufbau**.

Beispiel: Wir wollen zeigen, dass jede wohlgeformte Formel genau so viele rechte wie linke Klammern hat. Im ersten Schritt (dem **Induktionsanfang**) zeigen wir also, dass diese Eigenschaft (genau so viele rechte wie linke Klammern zu haben) auf atomare Aussagezeichen zutrifft. Das ist klar, weil atomare Aussagezeichen gar keine Klammern enthalten.

Im zweiten Schritt (dem **Induktionsschritt**) zeigen wir, dass sich diese Eigenschaft ?vererbt?; Dazu beobachten wir: Falls die wohlgeformte Formel α genau so viele rechte wie linke Klammern hat, dann auch $\neg\alpha$ (weil ja keine Klammern dazukommen!).

Falls α und β beide gleich viele rechte wie linke Klammern haben, dann auch $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ und $(\alpha \rightarrow \beta)$. Denn in jedem Fall kommt genau eine rechte und eine linke Klammer dazu. Weil alle wohlgeformten Formeln entweder atomare Aussagebuchstaben oder der Form $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ und $(\alpha \rightarrow \beta)$ sind, ist damit gezeigt, dass alle wohlgeformten Formeln die Eigenschaft besitzen, genau so viele rechte wie linke Klammern zu haben.

1.2 Semantik der AL

Ein **aussagenlogisches Modell** (oder Interpretation, Bewertung) ist eine Funktion v , die jedem atomaren Satzzeichen einen der Wahrheitswerte **w** (für **wahr**) oder **f** (für **falsch**) zuordnet. Hier also die erste wichtige Definition:

Definition 2. *Ein **aussagenlogisches Modell** ist eine Funktion $v : \{p, q, r, s, p_1, q_1, \dots\} \longrightarrow \{w, f\}$.*

Für jedes Modell (d.h. für jede solche Funktion v) definieren wir nun weiters, wie die Wahrheitswerte der komplexeren Sätze (d.h. der Sätze, die wir mittels der atomaren Satzzeichen und der Junktoren bilden können) von den Wahrheitswerten der atomaren Satzzeichen abhängen. M.a.W: Wir geben **Wahrheitsbedingungen** für alle möglichen Sätze an.

Wir machen das, indem wir wider rekursiv die Erweiterung $\bar{v}(\alpha)$ der Funktion v auf **alle** wohlgeformten Formeln definieren.

Definition 3. *I. Falls α ein atomares Satzzeichen ist, so ist $\bar{v}(\alpha) = v(\alpha)$*

II. Falls α, β beliebige Formeln sind, so ist

- i. $\bar{v}(\neg\alpha) = w$ genau dann wenn $\bar{v}(\alpha) = f$*
- ii. $\bar{v}(\alpha \wedge \beta) = w$ gdw. $\bar{v}(\alpha) = w$ und $\bar{v}(\beta) = w$.*
- iii. $\bar{v}(\alpha \vee \beta) = w$ gdw. $\bar{v}(\alpha) = w$ oder $\bar{v}(\beta) = w$ (oder beides).*
- iv. $\bar{v}(\alpha \rightarrow \beta) = w$ gdw. $\bar{v}(\alpha) = f$ oder $\bar{v}(\beta) = w$ (oder beides)*

Wir sagen nun: Ein Satz α ist wahr im Modell v falls $\bar{v}(\alpha) = w$. Die Klausel II.i. besagt also z.B. dass die Negation eines Satzes wahr ist genau dann wenn der Satz

selbst falsch ist. Klausel II. ii. besagt dass die Konjunktion zweier Sätze wahr ist genau dann wenn beide Konjunkte wahr sind. Klausel II.iii. legt fest, dass eine Disjunktion (ein “oder”-Satz) wahr ist, wenn mindestens einer der beiden Teilsätze wahr ist (mit dem Zeichen \vee haben wir uns also auf ein einschließendes Oder festgelegt).

Beispiel: Gegeben sei das Modell (die Interpretation, die Bewertung) v , wobei v definiert sei durch

$$v(p) = w$$

$$v(q) = f$$

$$v(r) = w$$

(Die restlichen Werte von v interessieren uns im Moment nicht.)

Wir wollen den Wahrheitswert der Aussage $((p \wedge q) \vee \neg r)$ berechnen, d.h. wir wollen wissen, ob $\bar{v}((p \wedge q) \vee \neg r)$ gleich f oder w ist. Wir wenden dazu sukzessive die Wahrheitsbedingungen von oben an:

$$\bar{v}((p \wedge q) \vee \neg r) = w \text{ genau dann wenn } \bar{v}(p \wedge q) = w \text{ oder } \bar{v}(\neg r) = w. \\ \text{(Klausel)}$$

Wir prüfen zunächst den ersten Fall:

$$\bar{v}(p \wedge q) = w \text{ genau dann wenn } \bar{v}(p) = w \text{ und } \bar{v}(q) = w. \text{ (Klausel ii)}$$

Diesen Fall können wir aber schon ausschließen, denn bzgl. unserer Interpretation v (und Klausel II.i.) gilt: $\bar{v}(q) = f$. Bleibt noch der andere Fall zu prüfen, nämlich ob $\bar{v}(\neg r) = w$:

$$\bar{v}(\neg r) = w \text{ genau dann wenn } \bar{v}(r) = f, \text{ was bzgl. unserer Interpretation } v \\ \text{(und wiederum Klausel II.i.) aber ebenfalls nicht der Fall ist.}$$

Wir haben also gezeigt, dass in unserem Modell sowohl die Aussage $(p \wedge q)$, als auch die Aussage $\neg r$ falsch ist - und damit dass die Aussage $(p \wedge q) \vee \neg r$ ebenfalls falsch ist.

Man kann sich die Definitionen von oben auch mit Hilfe von Wahrheitstafeln klarmachen. Die Wahrheitstafel für die Bedingung II.ii. etwa sieht so aus:

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

und die Wahrheitstafel für das sogenannte materiale Konditional (Klausel II.iv.) sieht so aus:

α	β	$(\alpha \rightarrow \beta)$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Offenbar kann man solche Wahrheitstafeln auch dazu benutzen, um **beliebig-komplexe Formel** durchzuchecken und daraufhin zu überprüfen, ob sie in jeder/mindestens einer/keiner Interpretation wahr (oder falsch) ist. Folgende Wahrheitstafel zeigt z.B. dass das komplexe Schema $(\neg\alpha \vee \beta)$ äquivalent ist zu $(\alpha \rightarrow \beta)$:

α	β	$(\neg\alpha \vee \beta)$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Hier eine Wahrheitstafel für die komplexer Formel $((p \vee q) \vee \neg r)$:

p	q	r	$((p \vee q) \vee \neg r)$
w	w	w	w
w	w	f	w
w	f	w	w
w	f	f	w
f	w	w	w
f	w	f	w
f	f	w	f
f	f	f	w

Die Tafel zeigt, dass $((p \vee q) \vee \neg r)$ in jeder Interpretation wahr ist — bis auf die Interpretation, in der p falsch, q falsch und r wahr ist.

- Definition 4.**
- i. Aussagenlogische Formeln, die in jeder Interpretation wahr sind, nennt man **Tautologien**
 - ii. Aussagenlogische Formeln, die in mindestens einer Interpretation wahr sind, nennt man **erfüllbar**
 - iii. Aussagenlogische Formeln, die in keiner Interpretation wahr sind, nennt man **Kontradiktionen**

Man kann sich etwa leicht davon überzeugen, dass die Formeln

a.) $(p \vee \neg p)$

b.) $(p \rightarrow p)$

Tautologien sind — dass die Formeln

a.) $(p \wedge \neg p)$

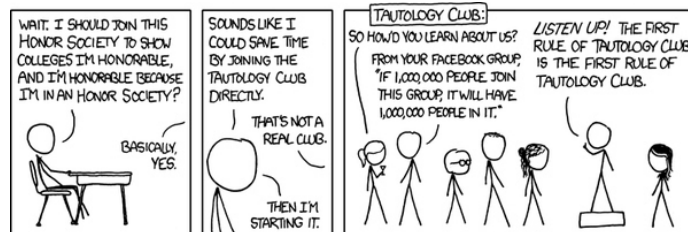
b.) $\neg(p \rightarrow p)$

Kontradiktionen sind und dass die Formeln

a.) $(p \vee p)$

b.) $\neg(p \rightarrow q)$

erfüllbar sind.



Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, wie man Wahrheitstafeln benutzen kann, um Argumente auf ihre Gültigkeit hin zu testen.

1.2.1 Exkurs 1: Funktionale Vollständigkeit

1.2.2 Exkurs 2: Normalformen

Folgende Problemstellung: wir haben eine vollständig ausgefüllte Wahrheitstafel vorgegeben. Wie können wir eine Formel (die genau die vorgegebenen atomaren Aussagebuchstaben enthält) finden, die genau diese Wahrheitstafel hat?

Angenommen wir haben etwa vorgegeben, dass unsere gesuchte Formel α diese Wahrheitstafel hat:

p	q	r	α
w	w	w	w
w	w	f	f
w	f	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	w	f	f
f	f	w	w
f	f	f	f

Wie können wir so eine (irgendeine) Formel α finden? Eine Möglichkeit wäre Herumprobieren. Herumprobieren ist zwar manchmal nicht das Schlechteste, man kommt aber zu einer systematischeren Methode, wenn man sich folgendes überlegt:

Die vorgegebene Wahrheitstafel sagt uns, dass die gesuchte Formel in drei Fällen wahr (1., 3. und 7. Zeile), in den restlichen Fällen falsch ist. Das heisst, die gesuchte Formel ist wahr *genau dann wenn*:

p wahr und q wahr und r wahr (1. Zeile) ODER

p wahr und q falsch und r wahr (3. Zeile) ODER

p falsch und q falsch und r wahr (7. Zeile)

anders ausgedrückt: die gesuchte Formel α ist wahr *genau dann wenn*:

p wahr und q wahr und r wahr (1. Zeile) ODER

p wahr und $\neg q$ wahr und r wahr (3. Zeile) ODER

$\neg p$ wahr und $\neg q$ wahr und r wahr (7. Zeile)

nochmal anders ausgedrückt (indem wir die Wahrheitsbedingung für die Konjunktion (“und”) \wedge benutzen): die gesuchte Formel ist wahr *genau dann wenn*:

$(p \wedge q \wedge r)$ wahr ist ODER

$(p \wedge \neg q \wedge r)$ wahr ist ODER

$(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ wahr ist

oder nochmal anders (indem wir die Wahrheitsbedingung für die Disjunktion (“oder”) \vee verwenden – *genau dann wenn*

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

Et voila! Schon haben wir eine Formel α gefunden mit der obigen Wahrheitstafel, nämlich die gerade erwähnte (lange) Formel $(p \wedge q \wedge r) \vee \dots$ (Wen die “Herleitung” nicht überzeugt hat, der möge dies überprüfen, indem er eine Wahrheitstafel für die Formel $(p \wedge q \wedge r) \vee \dots$ macht.)

Man nennt so eine Formel auch eine Formel in (kanonischer) **disjunktiver Normalform** (kurz *DNF*), weil sie eine Disjunktion (von lauter Konjunktionen) ist, die Disjunktion \vee also der Hauptjunktorktor der ganzen Formel ist. Sieht man sich noch einmal die vorgegebene Wahrheitstafel an und vergleicht sie mit unserer Formel $(p \wedge q \wedge r) \vee \dots$, so springt auch sofort der Algorithmus ins Auge, den man befolgen muss, um zu $(p \wedge q \wedge r) \vee \dots$ zu kommen. Wir wollen uns dieses “Kochrezept” an einem weiteren Beispiel veranschaulichen:

Folgende Wahrheitstafel sei vorgegeben:

p	q	r	α
w	w	w	f
w	w	f	f
w	f	w	f
w	f	f	f
f	w	w	w
f	w	f	w
f	f	w	f
f	f	f	w

Wieder wollen wir eine Formel α mit dieser Wahrheitstafel finden. Dazu machen wir folgendes:

REZEPT für *DNF*:

Erster Schritt: Wir sehen uns alle Zeilen an, in der die gesuchte Formel **wahr** sein soll. (In diesem Beispiel sind das die 5., 6. und die 8. Zeile.)

Zweiter Schritt: Wir sehen uns die Interpretationen der atomaren Aussagebuchstaben all dieser Zeilen an und bilden (für jede Zeile) eine **Konjunktion**

wie folgt: falls der atomare Aussagebuchstabe in dieser Interpretation den Wahrheitswert **w** hat, nehmen wir den Aussagebuchstaben selbst zur **Konjunktion** dazu; falls der Aussagebuchstabe in dieser Interpretation den Wahrheitswert **f** hat, nehmen wir die *Negation* dieses Aussagebuchstabens zur **Konjunktion** dazu. (Auf dieses Beispiel bezogen bedeutet das, dass wir Konjunktionen $(\neg p \wedge q \wedge r)$, $(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$ und $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ bilden.)

Dritter Schritt: Wir bilden die **Disjunktion** aller im zweiten Schritt gebildeten **Konjunktionen** und sind fertig. (Im Beispiel: Wir bilden die Formel $(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.)

Der eben erläuterte Algorithmus bietet *eine* Möglichkeit eine Formel zu einer beliebig vorgegebenen Wahrheitstafel zu finden (nämlich eine Formel in kanonischer disjunktiver Normalform). Was tun wir aber mit folgender Wahrheitstafel?

p	q	r	α
w	w	w	w
w	w	f	w
w	f	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	w	f	w
f	f	w	f
f	f	f	w

Selbstverständlich funktioniert auch hier das eben beschriebene Kochrezept: wir können also eine Formel in *DNF* finden, die genau diese Wahrheitstafel hat. Andererseits ist diese Formel ziemlich lang – es wäre also fein, wenn wir eine Methode zur Hand hätten, um eine Formel mit dieser Wahrheitstafel zu finden, *ohne* 6 Konjunktionen von jeweils drei Aussagebuchstaben (oder deren Negationen) bilden zu müssen.

Glücklicherweise gibt es so einen Algorithmus und er ist genau so einfach wie der oben Beschriebene zum Finden einer Formel in *DNF*. Tatsächlich ist er vollkommen *komplementär* dazu (man vergleiche dazu die beiden “Rezepte”). Wir machen dazu folgendes:

REZEPT für KNF:

Erster Schritt: Wir sehen uns alle Zeilen an, in der die gesuchte Formel **falsch** sein soll. (In diesem Beispiel sind das die 4. und die 7. Zeile.)

Zweiter Schritt: Wir sehen uns die Interpretationen der atomaren Aussagebuchstaben all dieser Zeilen an und bilden (für jede Zeile) eine **Disjunktion** wie folgt: falls der atomare Aussagebuchstabe in dieser Interpretation den Wahrheitswert **f** hat, nehmen wir den Aussagebuchstaben selbst zur **Disjunktion** dazu; falls der Aussagebuchstabe in dieser Interpretation den Wahrheitswert **w** hat, nehmen wir die *Negation* dieses Aussagebuchstabens zur **Disjunktion** dazu. (Auf dieses Beispiel bezogen bedeutet das, dass wir Disjunktionen $(\neg p \vee q \vee r)$ und $(p \vee q \vee \neg r)$ bilden.)

Dritter Schritt: Wir bilden die **Konjunktion** aller im zweiten Schritt gebildeten **Disjunktionen** und sind fertig. (Im Beispiel: Wir bilden die Formel $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$.)

Man nennt so eine Formel auch eine Formel in (kanonischer) **konjunktiver Normalform** (*KNF*). Wir haben also eine zweite Methode gefunden, um eine Formel zu finden, die zu einer vorgegebenen Wahrheitstafel “passt”. Beide Methoden kann man selbstverständlich auch dazu benutzen um zu einer vorgegebenen *Formel* eine andere, dazu *äquivalente* Formel in *DNF* (oder *KNF*) zu finden.

Angenommen uns ist etwa die Formel $(p \rightarrow q) \vee q$ vorgegeben und wir wollen eine dazu äquivalente Formel in *DNF* finden. Alles was wir tun müssen ist, die Wahrheitstafel für $(p \rightarrow q) \vee q$ aufstellen

p	q	$(p \rightarrow q) \vee q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

und danach das “REZEPT für *DNF*” anwenden um auf die zu $(p \rightarrow q) \vee q$ äquivalente Formel $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ zu kommen.

Man beachte dass man mit den beiden Methoden *kanonische* Normalformen (*DNF* oder *KNF*) bekommt. Bei der kanonischen *DNF* z.B. kommt in jedem Disjunkt *jeder*

Aussagebuchstabe *genau* einmal vor (negiert oder unnegiert). Es gibt aber natürlich auch Formeln, die in *DNF* vorliegen, aber nicht in *kanonischer DNF*. Eine Formel liegt in *DNF* vor, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von **Literalen** (d.i. Aussagebuchstaben oder deren Negationen) ist. Das muss aber nicht bedeuten dass in den Konjunktionen jeder Aussagebuchstabe auch vorkommen muss! Z.B. ist die Formel $\neg p \vee q$ eine Formel in *DNF* (sie ist eine Disjunktion von “leeren Konjunktionen”, d.i. Konjunktionen, die nur aus einem Konjunkt bestehen), die zu obiger Formel $(p \rightarrow q) \vee q$ äquivalent ist. Sie ist aber nicht in *kanonischer DNF*, weil eben nicht in jedem Disjunkt jeder Aussagebuchstabe genau einmal vorkommt. Anders gesagt: Während es zu jeder Formel (unendlich) viele dazu äquivalente Formel in *DNF* gibt (man überlege sich wieso!), gibt es – bis auf Vertauschungen bei den Disjunkten und den Konjunkten – nur **eine** *kanonische DNF* (deshalb heißt sie auch *kanonisch*). (Das alles gilt natürlich mutatis mutandis auch für die (*kanonische*) *KNF*.)

1.3 Semantischer Folgerungsbegriff

Es sei α eine AL-Formel und Σ eine Menge von AL-Formeln. Ein Paar $\langle \Sigma, \alpha \rangle$ nennen wir ein **Argument** (manchmal auch einen **Schluss**). Die Formeln in der Menge Σ nennt man die **Prämissen** des Arguments, die Formel α die **Conclusio**.

Die Logik beschäftigt sich ganz entscheidend mit der Frage, welche Argumente (oder Schlüsse) gültig sind und welche nicht. Hier die zentrale Definition der semantischen Gültigkeit eines Arguments:

Definition 5. Eine Formel α (die *Conclusio*) **folgt semantisch** aus einer Menge von Formeln Σ (den *Prämissen*) genau dann wenn für jedes AL-Modell v gilt: Wenn für jedes $\beta \in \Sigma$ gilt, dass $\bar{v}(\beta) = w$, dann ist auch $\bar{v}(\alpha) = w$. Falls das der Fall ist, schreiben wir auch $\Sigma \models \alpha$.

In Worten also: Eine Formel α folgt semantisch aus einer Menge von Formeln Σ genau dann wenn α immer dann wahr ist, wenn auch alle Prämissen (also die Formeln in Σ wahr sind).

Wollen wir also zeigen, dass ein Argument semantisch gültig ist, so haben wir demnach *alle* AL-Modelle durchzusehen, wo alle Prämissen wahr sind. Falls in all diesen Modellen auch die Conclusio wahr ist, so ist das Argument semantisch gültig. Falls dies nicht der Fall ist (d.h. falls es auch nur *ein* Modell gibt, in dem alle Prämissen wahr sind, nicht aber die Conclusio) so ist das Argument *nicht* semantisch gültig. Ein Beispiel dazu wird (hoffentlich) helfen:

Wir betrachten folgendes Argument (A):

- A. Lorelay mag Emily oder Rory mag Emily.
 - B. Lorelay mag Emily nicht.
-
- C. Also mag Rory Emily.

Wenn wir dieses Argument, dessen Prämissen die Sätze “Lorelay mag Emily oder Rory mag Emily” und “Lorelay mag Emily nicht” sind und dessen Conclusio der Satz “Rory mag Emily” ist, in unsere aussagenlogischen Sprache übersetzen, so erhalten wir folgendes Schema:

- A. $(p \vee q)$
 - B. $\neg p$
-
- C. q

Wir wollen nun wissen ob die letzte Formel (also q) aus den Prämissen (also der Menge von Formeln $\{(p \vee q), \neg p\}$ semantisch folgt, d.h. ob $\{(p \vee q), \neg p\} \models q$.

Dazu stellen wir zunächst eine Wahrheitstafel für alle beteiligten Formeln auf.

p	q	$(p \vee q)$	$\neg p$	q
w	w	w	f	w
w	f	w	f	f
f	w	w	w	w
f	f	f	w	f

In der zweiten und dritten Spalte stehen die Prämissen, in der letzten die Conclusio. Wie man sehen kann, gibt es genau *ein* Modell (eine Zeile in der Wahrheitstafel), in der *alle* Prämissen wahr sind, nämlich das Modell, wo p falsch ist und q wahr. In diesem Modell ist auch die Conclusio wahr (siehe letzte Spalte).

Nun erinnere man sich daran, dass ein Satz semantisch aus einer Menge von Prämissen folgt, wenn dieser Satz in jedem Modell wahr ist, in dem auch alle Prämissen wahr sind. Nun ist das einzige Modell, in dem alle Prämissen wahr sind aber dieses eine Modell (Zeile 3) – und hier ist tatsächlich auch die Conclusio wahr.

Wir haben somit gezeigt, dass

$$\{(p \vee q), \neg p\} \models q$$

und damit, dass das Argument (A) oben gültig ist.

Hier noch ein weiteres Beispiel. Wir wollen wissen, ob folgendes Argument (B) semantisch gültig ist:

- A. Wenn Martina Kuno mag, dann mag sie auch Leopold.
 B. Martina mag Kuno nicht.

 C. Also mag sie auch Leopold nicht.

Wir übersetzen wieder und sind also vor die Frage gestellt, ob gilt, dass $\{(p \rightarrow q), \neg p\} \models \neg q$ und wieder erstellen wir eine Wahrheitstafel für alle beteiligten Formeln:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg p$	$\neg q$
w	w	w	f	f
w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	w	w

Wir müssen wieder alle Modelle durchgehen, in denen alle Prämissen wahr sind. Im gegebenen Beispiel gibt es deren 2 Stück – die dritte und die vierte Zeile. In beiden Modellen muss die Conclusio ebenfalls wahr sein, damit das Argument tatsächlich semantisch gültig sein soll. In der vierten Zeile ist dies auch tatsächlich der Fall. Aber in der dritten *nicht*!

Wir erinnern uns, dass ein Satz aus einer Menge von Prämissen folgt genau dann wenn der Satz in *jedem* Modell wahr ist, in dem auch alle Prämissen wahr sind. Hier haben wir aber ein *Gegenmodell* gefunden. Zeile 3 liefert uns ein Modell, in dem alle Prämissen wahr sind, aber die Conclusio falsch. Kurz, $\neg q$ folgt *nicht* semantisch aus der Prämissenmenge $\{(p \rightarrow q), \neg p\}$, oder in Zeichen:

$$(p \rightarrow q), \neg p \not\models \neg q$$

Damit ist auch gezeigt, dass das Argument (B) oben nicht semantisch gültig ist. (Diesen – bekannten – Fehlschluss nennt man auch “Verneinung des Antezedens”. Der

Fehlschluss der “Affirmation des Konsequens” ergibt sich, wenn wir von $p \rightarrow q$ und q auf p schließen wollen.)

MERKE!

Um zu zeigen, dass ein Satz aus einer Menge von Prämissen semantisch folgt, ist es notwendig **alle** Modelle durchzugehen, in denen alle Prämissen wahr sind. Es ist in **jedem** dieser Fälle zu prüfen, ob dort auch die Conclusio wahr ist.

Um andererseits zu zeigen, dass ein Satz **nicht** semantisch aus einer Menge von Prämissen semantisch folgt, ist es ausreichend, **ein einziges** Modell zu finden, in dem alle Prämissen wahr sind, aber die Conclusio falsch.

1.4 Syntaktische Folgerungsbegriffe

Der **semantische Folgerungsbegriff** besagte: eine Formel γ folgt semantisch aus einer Menge von Formeln Σ (in Zeichen: $\Sigma \models \gamma$), genau dann wenn γ in jedem Modell (bei jeder Interpretation, bei jeder Bewertung) wahr ist, in dem auch alle Formeln in Σ wahr sind.

Demgegenüber betrachten wir jetzt den (genauer gesagt *einen bestimmten*) **syntaktischen** (oder beweistheoretischen) **Folgerungsbegriff**. Ein Satz γ folgt syntaktisch aus einer Menge von Sätzen Σ (in Zeichen: $\Sigma \vdash \gamma$) genau dann wenn γ mit bestimmten Regeln hergeleitet werden kann. Was mit “bestimmten Regeln” gemeint ist, kann von Fall zu Fall variieren. D.h. je nach den Axiomen, die wir annehmen und den Schlussregeln, die wir zulassen, erhalten wir verschiedene syntaktische Folgerungsbegriffe (auch wenn sich dann später herausstellen wird, dass diese äquivalent sind, in dem Sinne, dass aus einer bestimmten Satzmenge dieselben Sätze syntaktisch folgen, i.e. beweisbar sind).

1.4.1 Axiomatischer Kalkül nach Frege-Lukasiewicz

Der erste syntaktische Folgerungsbegriff, den Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben, geht aus von bestimmten Axiomen, nämlich:

- I. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- II. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- III. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

Man nennt diese Axiome auch die **Frege-Lukasiewicz-Axiome**, benannt nach den beiden Logikern **Gottlob Frege** und **Jan Lukasiewicz**.

Es ist zu beachten, dass es sich hier eigentlich nicht um einzelne Axiome, also um *Sätze*, sondern um *Axiomenschemata*, handelt. Die griechischen Kleinbuchstaben sind – wie schon früher – Metavariablen, die für Formeln stehen und gehören nicht zu unserer offiziellen aussagenlogischen Sprache (dazu gehören nur die atomaren Satzbuchstaben p, q, r, \dots , die aussagenlogischen Junktoren und Klammern. Wir erhalten durch Einsetzen von konkreten Formeln für α, β und γ dann konkrete Axiome. Es sind z.B. die Formeln

- i. $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p)$
- ii. $(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))$

beides Axiome: Die erste Formel ist ein Axiom der Form $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$, denn wir erhalten sie, indem wir im Schema $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ für α die Formel p einsetzen und für β die Formel $(p \rightarrow q)$.

Die zweite Formel ist ein Axiom der Form $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$, weil wir sie erhalten, indem wir in $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ das α durch die Formel $p \rightarrow q$ ersetzen und β durch die Formel q .

Bis jetzt haben wir nur die Möglichkeit Axiome anzuschreiben. Wenn wir aber Sätze formal beweisen wollen, brauchen wir auch noch **Schlussregeln**, die es uns erlauben, von bestimmten Sätzen zu anderen Sätzen überzugehen. Die einzige Schlussregel, die wir hier benutzen, ist der *Modus Ponens*, der besagt, dass: Wenn wir die Formel α schon bewiesen haben und auch die Formel $\alpha \rightarrow \beta$, dann können wir β auch hinschreiben. D.h. der Modus Ponens erlaubt uns den Übergang von α und $\alpha \rightarrow \beta$ zu β .

Wir sagen, dass eine Formel α ein **Theorem** ist, falls gilt $\vdash \alpha$, d.h. falls α aus der leeren Prämissenmenge *syntaktisch folgt* (d.i. *beweisbar* ist). Ein Theorem ist also das syntaktische Äquivalent zur Tautologie, die semantisch aus der leeren Menge folgt.

Hier nochmal zum Nachlesen der Beweis aus der Übung, wo wir nachgewiesen haben, dass $\vdash p \rightarrow p$, d.h. dass $p \rightarrow p$ ein Theorem ist. Man sieht hier auch, wie ein Beweis in diesem konkreten Kalkül auszusehen hat (Beweis im Kalkül des natürlichen Schließens, den sie später kennen lernen werden, sehen anders aus).

1. $p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)$ [Ax.der Form 1; $\alpha/p, \beta/q \rightarrow p$]
2. $(p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$ [Ax. der Form 2;
 $\alpha/p, \beta/q \rightarrow p, \gamma/p$]
3. $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$ [Modus Ponens auf Zeilen 1 und 2]
4. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ [Ax. der Form 1; $\alpha/p, \beta/p$]
5. $p \rightarrow p$ [Modus Ponens auf Zeilen 3 und 4]

Der Kommentar “[Ax.der Form 1; $\alpha/p, \beta/q \rightarrow p$]” auf der rechten Seite bedeutet hierbei folgendes: “Ergebnis der Ersetzung von α durch die Formel p und der Ersetzung von β durch die Formel $q \rightarrow p$ im Axiomenschema 1, d.i. im Axiomenschema $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ ”. D.h. wir notieren rechts immer, wie wir zur Formel in der aktuellen Zeile gekommen sind. “[Modus Ponens auf Zeilen 3 und 4]” bedeutet offensichtlich, dass wir die Formel in der aktuellen Zeile durch Anwendung des Modus Ponens auf die Formeln in den Zeilen 3 und 4 gewonnen haben.

Wichtig also:

Definition 6. Ein **Beweis** (im axiomatischen Kalkül nach Frege-Lukasiewicz) von α aus der Formelmenge Σ ist eine **endliche Folge von Formeln**, sodass gilt: α steht in der letzten Zeile dieser Folge und jede Formel der Folge ist

- i. eine **Prämisse**, d.h. Element der Menge Σ oder
- ii. eine Instanz eines der **Axiomenschemata I. – III.** oder
- iii. geht aus früheren Zeilen durch **Modus Ponens** hervor.

MERKE!

Formales Beweisen besteht also darin, ohne Rücksicht auf deren Bedeutungen, aus bestimmten Zeichenketten nach exakten Regeln andere Zeichenketten zu erzeugen.

1.4.2 Exkurs: Das Deduktionstheorem

1.4.3 Kalkül des natürlichen Schließens

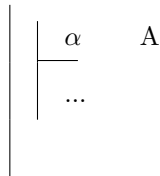
Wir haben früher schon einen Kalkül kennen gelernt, mit dem es möglich ist, die Gültigkeit von Argumenten rein syntaktisch – durch Zeichenmanipulationen und ohne Bezug auf Wahrheit oder andere semantische Begriffe – zu überprüfen. Aber axiomatische Kalküle sind beweistechnisch sehr unhandlich – einen Beweis gezielt zu finden kann ziemlich schwierig sein. Deshalb hat man in den 30er Jahren handlichere, intuitivere Kalküle erfunden; Kalküle, die dem Schlussfolgern, wie es z.B. in der Mathematik tatsächlich vor sich geht, näher kommen. Eine Variante so eines Kalküls – einen *Fitch-style* Kalkül des natürlichen Schließens – werden wir uns näher ansehen.

Im Gegensatz zu axiomatischen Kalkülen, wo es einige Axiome und nur wenige Schlussregeln gibt – in unserem Fall beschränkten sich die Schlussregeln auf den modus ponens – gibt es in dieser Variante des Kalküls des natürlichen Schließens keine Axiome und viele Schlussregeln.

Es gibt für jeden unserer Junktoren $\neg, \wedge, \rightarrow, \vee$ sogenannte Einführungs- (Introduction-) und Beseitigungsregeln (Eliminationrules). Außerdem gibt es – weil es ja keine Axiome gibt eine Regel der Annahme, die es erlaubt, beliebige Annahmen (möglicherweise nur temporär) zu treffen, um daraus etwas herzuleiten.

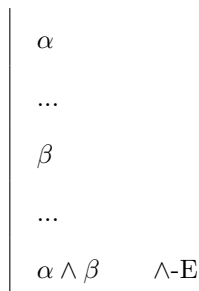
Die Regeln lauten:

Regel der Annahme:

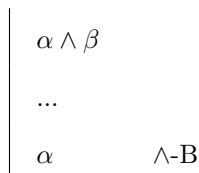


Die Regel der Annahme besagt, dass man beliebige Formeln an jeder Stelle in einem Beweis einfach annehmen kann. Kommentiert wird diese Regel mit dem Kürzel A . Der waagrechte Strich wird unter jede Annahme angebracht und der senkrechte Strich gibt an, wie weit man eine Annahme “mitschleppt”. Jedes mal, wenn wir eine neue Annahme treffen, rücken wir um einen senkrechten Strich nach rechts herein. Und jedes Mal wenn wir eine Abhängigkeit beseitigen können (Regeln, mit denen man Abhängigkeiten beseitigen kann, werden wir später kennen lernen), rücken wir nach links: Die senkrechten Striche links neben einer Formel deuten also an, von welchen Annahmen diese Formel abhängt. Um die verschiedenen Abhängigkeiten festzustellen geht man einfach alle senkrechten Striche neben der Formel nach oben und sieht nach, welche Annahmen (oder Prämissen) dort beginnen (also einen waagrechten Strich haben). (Nach ein paar Beispielen wird klarer sein, wie das funktioniert.)

Einführungsregel für \wedge :



1. Beseitigungsregel für \wedge :



2. Beseitigungsregel für \wedge :

$$\begin{array}{c|c}
 \alpha \wedge \beta & \\
 \dots & \\
 \beta & \wedge\text{-B}
 \end{array}$$

Die Einführungsregel für \wedge besagt: Wenn ich α herleiten kann und auch β , dann kann ich mit der Regel der \wedge -Einführung auch $\alpha \wedge \beta$ herleiten.

Die Beseitigungsregeln für \wedge besagen, dass, wenn ich $\alpha \wedge \beta$ herleiten kann, dann mit der jeweiligen Beseitigungsregel sowohl α als auch β herleiten kann – also sowohl die links vom \wedge stehende als auch die rechts vom \wedge stehende Formel.

1. Regel der \vee -Einführung

$$\begin{array}{c|c}
 \alpha & \\
 \dots & \\
 \alpha \vee \beta & \vee\text{-E}
 \end{array}$$

2. Regel der \vee -Einführung

$$\begin{array}{c|c}
 \alpha & \\
 \dots & \\
 \beta \vee \alpha & \vee\text{-E}
 \end{array}$$

Die Einführungsregeln für \vee sollten klar sein: Wenn ich α bewiesen habe, dann kann ich auf das (schwächere) $\alpha \vee \beta$ und das (ebenfalls schwächere) $\beta \vee \alpha$ schließen.

Die Beseitigungsregel(n) für \vee lauten:

1. Regel der \vee -Beseitigung:

$$\begin{array}{c|c}
 \alpha \vee \beta & \\
 \dots & \\
 \neg \alpha & \\
 \dots & \\
 \beta & \vee\text{-B}
 \end{array}$$

und

2. Regel der \vee -Beseitigung:

$\alpha \vee \beta$	
...	
$\neg\beta$	
...	
α	\vee -B

Beide Regeln sind also Varianten des disjunktiven Syllogismus (*modus tollendo ponens*), der besagt: Wenn eine Disjunktion wahr ist, und von einer der beiden Aussagen (Disjunkte) ist bekannt, dass sie falsch ist, dann muss die andere Aussage wahr sein.

Einführungsregel für \rightarrow :

<table> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">α</td><td>A</td></tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">...</td><td></td></tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">β</td><td></td></tr> </table>	α	A	...		β		
α	A						
...							
β							
$\alpha \rightarrow \beta$	\rightarrow -E						

Beseitigungsregel für \rightarrow :

α	
...	
$\alpha \rightarrow \beta$	
β	\rightarrow -B

Die Einführungsregel für \rightarrow besagt, dass: wenn ich unter der Annahme, dass α gilt, mit den Regeln des Kalküls zeigen kann, dass auch β gilt, so kann ich mit der \rightarrow -Einführungsregel zeigen, dass $\alpha \rightarrow \beta$ gilt und nach links hereinrücken; die Annahme α kann also fallengelassen werden.

Die Beseitigungsregel ist einfach nur eine Formulierung des Modus Ponens, d.h. von α und $\alpha \rightarrow \beta$ kann man auf β schließen.

Einführungsregel für \neg :

$$\begin{array}{|l}
 \hline
 \alpha \\
 \hline
 \dots \\
 \beta \wedge \neg\beta \\
 \hline
 \neg\alpha \qquad \neg\text{-E}
 \end{array}$$

Beseitigungsregel für \neg :

$$\begin{array}{|l}
 \hline
 \neg\alpha \\
 \hline
 \dots \\
 \beta \wedge \neg\beta \\
 \hline
 \alpha \qquad \neg\text{-B}
 \end{array}$$

Die \neg -Einführungsregel besagt: Wenn ich *unter der Annahme*, dass α gilt, einen expliziten Widerspruch der Form $\beta \wedge \neg\beta$ herleiten kann, so kann ich mit dieser Regel $\neg\alpha$ beweisen und die Annahme α beseitigen (also nach links unter den senkrechten Strich hereinrücken).

Ähnlich besagt die \neg -Beseitigungsregel, dass ich α beweisen kann, falls ich *unter der Annahme*, dass $\neg\alpha$ gilt, einen Widerspruch herleiten kann. Wieder kann ich nach links einrücken und die Annahme $\neg\alpha$ fallenlassen.

Beide Regeln entsprechen gewissermaßen dem **Widerspruchsbeweis**, auch *reductio ad absurdum* genannt. Wir zeigen also, dass ein Satz gilt, indem wir zeigen, dass ihre Negation zu einem Widerspruch führt.

Hier einige Beispiele:

Wir wollen zeigen, dass das Gesetz der doppelten Negation $\neg\neg p \rightarrow p$ ein Theorem ist – also aus der leeren Prämissenmenge beweisbar.

1	$\neg\neg p$	A
2	$\neg p$	A
3	$\neg\neg p \wedge \neg p$	$\wedge E$ 1,2
4	p	$\neg B$ 1,2,3
5	$\neg\neg p \rightarrow p$	$\rightarrow E$ 1,4

Zur Erklärung: Die erste Spalte gibt die **Zeilennummer** an. In der letzten Spalte stehen die (Kürzel für die) Regeln und auf welche Zeilen sie angewandt wurden.

In der ersten Zeile nehmen wir an, dass $\neg\neg p$ gilt und wollen daraus herleiten, dass p gilt. Diese Strategie ist ganz allgemein: Immer wenn das, was gezeigt werden soll, eine Implikation – also der Form $\alpha \rightarrow \beta$ – ist, führe man das Antezedens α mit der Regel der Annahme ein, und versuche β herzuleiten. Zum Schluss wende man die Regel der \rightarrow -Einführung an und man erhält $\alpha \rightarrow \beta$ (und kann die Abhängigkeit von α beseitigen – also nach links einrücken).

Mit $\neg\neg p$ können wir mit unseren Regeln zunächst nicht viel anfangen: wir wollen es deshalb mit einer *reductio ad absurdum* versuchen: Dazu nehmen wir die Negation von dem was wir zeigen wollen (nämlich p), also $\neg p$ an und versuchen einen Widerspruch herzuleiten. Ein Widerspruch ergibt sich dann ganz leicht, wenn wir einfach die Regel der \wedge -Einführung auf unsere beiden Annahmen anwenden. Die Zahlen neben dem Kürzel $\wedge E$ sollen darauf hinweisen, dass wir diese Regel auf die (Formeln in den) Zeilen 1 und 2 anwenden.

Wir haben nun einen Widerspruch aus der Annahme $\neg p$ hergeleitet, können also die Regel der \neg -Beseitigung anwenden und wieder nach links einrücken (und die temporäre Annahme $\neg p$, die nur dazu da war, den Widerspruch herzuleiten, wieder fallen lassen). Neben dem Kürzel schreiben wir die Zahlen der Zeilen, auf die die Regel angewandt wurde; das sind die Zeilennummern der Annahmen, die zum Widerspruch geführt haben und die Zeile, in der der explizite Widerspruch steht.

Zum Schluss wenden wir – wie angekündigt – die Regel der \rightarrow -Einführung an, rücken wieder nach links (werden also die Abhängigkeit von $\neg\neg p$ los) und sind fertig. Zitiert werden bei der \rightarrow -Einführung die Zeile, in der das Antezedens angenommen wurde, und die Nummer der Zeile, in der das Konsequens steht (das ja irgendwo stehen muss, damit diese Regel überhaupt angewendet werden kann).

Hier noch ein Beispiel: Wir wollen zeigen, dass das sogenannte *ex contradictione quodlibet* (aus einem Widerspruch folgt beliebiges), also $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$ gilt:

1	$p \wedge \neg p$	A
2	$\neg q$	A
3	$p \wedge \neg p$	Re 1
4	q	\neg B 1,2,3
5	$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$	\rightarrow E 1,4

Wir haben in diesem Beispiel eine neue Regel benutzt, die strenggenommen notwendig ist. Die Regel besagt, dass wir in beliebigen späteren Zeilen, auch auf “höheren” Ebenen schon bewiesene Formeln beliebig oft wiederholen können. Man nennt sie auch **Reiterations-** oder **Repetitionsregel**.

Im konkreten Fall brauchen wir diese Regel deshalb, weil wir ja nach $\neg q$ einen expliziten Widerspruch brauchen, um dann Regel \neg B anwenden zu können. Wir benutzen diese neue Regel deshalb, um den Widerspruch in Zeile 1 zu wiederholen.

Ansonsten ist die Strategie ziemlich ähnlich der im ersten Beispiel: Der zu beweisende Satz $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$ ist eine Implikation – wir nehmen also wieder das Antezedens an und versuchen das Konsequens herzuleiten. Das machen wir wieder via *reductio ad absurdum*, d.h. wir nehmen die Negation der Conclusio an – d.i. $\neg q$ – und versuchen einen Widerspruch herzuleiten. Der Widerspruch ist nun aber schon da – nämlich die Annahme in Zeile 1 – wir brauchen ihn also nur zu wiederholen. Die \neg -Beseitigungsregel erlaubt uns nun auf q zu schließen und mit der \rightarrow -Einführungsregel kommen wir wieder auf das gewünschte $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$.

Die letzten beiden Regeln (die wir, wie wir gesehen haben, aus rein technischen Gründen brauchen) sind also die sogenannten *Reiterationsregeln*:

1. Reiterationsregel:

	α	
	...	
	α	Re_1

Diese Regel besagt also nichts weiter, als dass wir jeden Satz, der schon bewiesen wurde, beliebig oft wiederholen können.

2. Reiterationsregel:

α	
\dots	
\dots	
α	Re_2

Die Regel Re_2 besagt, dass ich einen schon bewiesenen Satz wiederholen darf, auch auf einer neuen, “höheren” Ebene. D.h. ich darf eine bewiesene Formel von einer zusätzlichen Annahme abhängig machen. Man beachte, dass man diese Regel nicht benutzen darf, um eine Formel von einer “höheren” in eine “niedrigere” Ebene zu importieren.

Man betrachte etwa folgende (falsche!) Anwendung der Regel Re_2 :

1	p	A
2	q	A
3	q	Re 2
4	$p \rightarrow q$	$\rightarrow E$ 1,3

Wir hätten somit bewiesen, dass $p \rightarrow q$ ein Theorem ist, *egal welche Sätze p und q sind*, was natürlich nicht sein kann.

Der Grund, warum man beide Regeln – streng genommen – braucht, ist, weil die anderen Regeln in einer ganz bestimmten Art und für eine ganz bestimmte *Reihenfolge* formuliert waren. Die Regel für die \rightarrow -Beseitigung etwa war (streng genommen) so formuliert: Wenn wir (zuerst!) α und (dann!) $\alpha \rightarrow \beta$ bewiesen haben, dann können wir β mit \rightarrow -B beweisen. Offensichtlich spielt aber die Reihenfolge keine wesentliche Rolle. Rein technisch müssen wir diesem Umstand aber Rechnung tragen und brauchen demgemäß die Regel Re_1 . (Frage: Warum braucht man so eine Regel für den axiomatischen Kalkül *nicht*!?)

Ähnliches gilt für die Regel Re_2 . Sehen wir uns wieder beispielhaft die Regel für die \rightarrow -Beseitigung an: Diese Regel war nur für Formeln α und $\alpha \rightarrow \beta$, formuliert, wenn sie auf *einer* Beweisebene stehen. Intuitiv sollten beide Formeln aber auch auf höhere Ebenen übertragbar sein, denn: was bewiesen ist, ist bewiesen, d.h. eine zusätzliche Annahme kann etwas schon Bewiesenes nicht “falsch machen”; wir sollten schon Bewiesenes verwenden können, auch wenn wir zusätzliche Annahmen treffen.

Folgende streng genommen nicht *ganz* korrekte Ableitung

1		$q \rightarrow p$	P
2			
3			
4			

kann aber sehr einfach in eine vollständige Ableitung verwandelt werden:

1		$q \rightarrow p$	P
2			
3			
4			
5			

Wir werden aber bei der Anwendung dieser Regeln nicht besonders streng sein, und meistens weglassen. (Tatsächlich wurde die Regel im ersten Beispiel oben schon “vergessen”.)

Hier noch ein Beispiel, in dem eine \vee -Beseitigung vorkommt: Wir wollen zeigen, dass $\{\neg p \vee q, q \rightarrow \neg p\} \vdash \neg p$

1		$\neg p \vee q$	P
2		$q \rightarrow \neg p$	P
3			
4			
5			
6			
7			

In diesem Beweis kommen auch Prämissen vor. *Prämissen* verhalten sich ähnlich wie *Annahmen*, nur dass man ihre Wahrheit für einen ganzen Beweis als “fixiert” betrachtet (anders als Annahmen, die innerhalb eines Beweises auch nur temporär getroffen werden können). Wir setzen die Prämissen daher geblockt an den Anfang eines Beweises.

Die grundsätzliche Idee hinter dieser Ableitung ist eine *reductio ad absurdum*: Wir nehmen an, $\neg\neg p$ würde gelten, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Der Rest sollte klar sein: nimmt man $\neg\neg p$ an, dann muss aufgrund der ersten Prämisse q gelten (mit \vee -Beseitigung); damit aber auch $\neg p$ aufgrund der zweiten Prämisse (mit \rightarrow -B). $\neg p$ steht aber im Widerspruch zur getroffenen Annahme $\neg\neg p$. Also muss $\neg\neg p$ falsch sein, also $\neg p$ wahr.

1.4.4 Übungsbeispiele

Leite im Kalkül des natürlichen Schließens ab:

1. $\{p \rightarrow \neg p\} \vdash \neg p$
2. $\{\neg p \rightarrow (p \wedge q), \neg q\} \vdash p \wedge \neg q$
3. $\{p, p \rightarrow (p \wedge r)\} \vdash r \vee s$
4. $\{(p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge p)\} \vdash p$
5. $\{p \wedge q\} \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)$
6. $\{p \vee q\} \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$
7. $\{\neg(\neg p \vee \neg q)\} \vdash p \wedge q$
8. $\{\neg(\neg p \wedge \neg q)\} \vdash p \vee q$
9. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$
10. $\vdash (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Die Lösungen findet man im Abschnitt 3.1.

1.4.5 Der Resolutionskalkül

Der Resolutionskalkül ist ein weiteres syntaktisches Verfahren, um zu zeigen ob ein Argument gültig ist. Die Motivation ist allerdings etwas anders als bei den bisherigen Kalkülen. Im Axiomatischen Kalkül oder dem Kalkül des natürlichen Schließens hatten wir einige Regeln und Axiome, mit deren Hilfe wir aus einer bestimmten Menge von Prämissen direkt (manchmal mit Hilfe von Zusatzannahmen) die Konklusion hergeleitet haben. Im Resolutionskalkül ist das anders.

Die Motivation des Resolutionsverfahrens ist stark semantisch motiviert und geht von der Tatsache aus, dass ein Satz β semantisch aus einer Menge von Prämissen $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ folgt wenn es keine Interpretation gibt bzgl. der alle Prämissen wahr sind

und die Konklusion β falsch (d.h. $\neg\beta$ wahr) ist. Kurz: $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ genau dann wenn die Menge $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \neg\beta\}$ **nicht erfüllbar** ist. Die Grundidee des Resolutionsverfahrens ist dann sehr einfach: wir nehmen einfach an, dass $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \neg\beta\}$ — oder was dasselbe ist $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ — *doch erfüllbar ist* und versuchen dann (mit Hilfe einfacher Umformungsregeln) zu zeigen, dass auch eine bestimmte widersprüchliche Formel erfüllbar wäre. Gelingt uns das, sind wir fertig. Denn widersprüchliche Formeln *sind nicht erfüllbar*! Die ursprüngliche Annahme dass $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ erfüllbar wäre, muss also falsch sein, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \neg\beta\}$ muss unerfüllbar sein — und damit muss β aus $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ semantisch folgen.

Soweit zur Idee, die hinter dem Resolutionskalkül steht. Das Verfahren selbst ist sehr einfach und lässt sich durch folgenden Alogrithmus beschreiben:

REZEPT für Resolutionsverfahren:

Erster Schritt: Bilde die Konjunktion aller Prämissen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zusammen Negation der Konklusion β , d.h. $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$.

Zweiter Schritt: Wandle die Formel $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta$ in eine *Konjunktive Normalform* um. Entweder — *brute force* — mit Hilfe des oben besprochenen Algorithmus (vgl. 1.2.2) oder mit Hilfe folgender Ersetzungsregeln: $\neg\neg\alpha = \alpha$, $\alpha \rightarrow \beta = \neg\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta = \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$, $\neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$, $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$, $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

Dritter Schritt: Man lasse in der resultierenden Formel in KNF die ganzen Konjunktionen weg und ersetze sie durch Beistriche.

Vierter Schritt: Man wende die beiden folgenden Regeln an, bis man auf einen Ausdruck der Form $\alpha, \neg\alpha$ — d.h. einen Widerspruch — kommt:

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma} \text{ RES}$$

$$\frac{\alpha \vee \alpha}{\alpha} \text{ FAKT}$$

Die erste Regel ist die Resolutionsregel, die zweite die Faktorisierungsregel.

Hier einige einfache Beispiele. Wir wollen mit Hilfe des Resolutionskalküls zeigen, dass aus den Prämissen $p \vee q$ und $\neg p$ die Konklusion q folgt. Dazu bilden wir gemäß **Schritt 1** die Konjunktion der Prämissen und der Negation der Konklusion, also den Satz $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$. Im nächsten Schritt wandeln wir den Satz um in Konjunktive Normalform. In diesem Fall ist das sehr einfach — der Satz IST schon in konjunktiver Normalform, d.h. er ist ein Konjunktion von Lauter Disjunktionen von sogenannten

Literale. Literale sind die atomaren Satzbuchstaben und deren Negationen — nicht aber deren doppelte Negationen. Die einzelnen Konjunkte in der KNF — d.h. die Disjunktionen — heissen auch Klauseln. D.h. die Formel um die es in diesem Beispiel geht enthält 3 Klauseln: $(p \vee q)$, $\neg p$ und $\neg q$. Jede einzelne Klausel ist eine Disjunktion (einzelne Satzbuchstaben oder deren Negationen zählen auch als Disjunktionen) von Literalen. Die Formel $p \vee q$ z.B. ist die Disjunktion der Literale p und q .

Im nächsten Schritt lassen wir die Konjunktionen weg und ersetzen sie durch Beistriche und erhalten den Ausdruck $p \vee q, \neg p, \neg q$ — auf diesen wenden wir dann die Regeln RES und FAKT an und versuchen die “leere Klausel” bzw. einen Widerspruch herzuleiten, d.h. einen Ausdruck der Form $\alpha, \neg\alpha$. In diesem Beispiel ist das wieder sehr einfach: wir wenden einfach einmal die Resolutionsregel an:

$$\frac{p \vee q, \neg p, \neg q}{q, \neg q} \text{ RES}$$

Das p in der ersten Klausel $p \vee q$ und das $\neg p$ in der zweiten Klausel “kürzen sich weg” aufgrund unserer Resolutionsregel **RES**. (Streng genommen entspricht das nicht unserer Formulierung der Regel **RES**, die das “Wegkürzen” eigentlich nur dann erlaubt, wenn die beiden Formeln direkt nebeneinander stehen. Wir erlauben uns hier den Luxus dieser etwas verallgemeinerten Regel — die natürlich immer noch gültig ist: $p \vee q$ ist ja logisch äquivalent zu $q \vee p$. Wir erlauben uns ausserdem, einzelne Klauseln zu vertauschen, wenn das günstig ist: statt $\dots\alpha, \beta\dots$ können wir also zu $\dots\beta, \alpha\dots$ übergehen. Wir werden so einen move daneben mit **VER** kommentieren.) Was übrig bleibt ist der Ausdruck $q, \neg q$, also ein Widerspruch, wenn man sich die inhaltliche Bedeutung vor Augen hält.

Was damit gezeigt ist, ist dass die Annahme, dass die Sequenz $p \vee q, \neg p, \neg q$ — die der Formel $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$ entspricht — nicht erfüllbar ist! Angenommen sie wäre es, dann wäre es auch die abgeleitete widersprüchliche (“leere”) Sequenz $q, \neg q$ (die ja ‘inhaltlich’ der Formel $q \wedge \neg q$ entspricht). Aber widersprüchliche Sequenzen (oder Formeln) sind natürlich nicht erfüllbar. Also kann es auch die ursprüngliche Sequenz bzw. Formel nicht erfüllbar gewesen sein. Also gibt es keine Interpretation in der die Formel $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$ wahr ist — oder was dasselbe bedeutet: in jeder Interpretation in der $p \vee q$ und $\neg p$ wahr sind, ist auch q wahr. Wir haben also mit dem Resolutionskalkül — noch einmal — gezeigt, dass das Argument mit den Prämissen $p \vee q$ und $\neg p$ und der Konklusion q gültig ist.

Hier noch ein Beispiel:

Wir wollen mit dem Resolutionsverfahren zeigen, dass aus den Prämissen $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ die Konklusion $p \rightarrow r$ folgt. Wir gehen wieder wie vorhin vor und bilden Konjunktion von Prämissen und Negation der Konklusion: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(p \rightarrow r)$. Im nächsten Schritt überführen wir diese Formel mit Hilfe der Ersetzungsregeln aus dem Rezept (Zweiter Schritt) in eine Konjunktive Normalform:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg(p \rightarrow r)$$

wird mit der Regel für das Konditional zu

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg(\neg p \vee r)$$

Mit Hilfe der Ersetzungsregel für negierte Disjunktionen, angewendet auf die letzte Teilformel, erhalten wir daraus

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg\neg p \wedge \neg r$$

und mit der Regel, die uns erlaubt, doppelte Negationen zu eliminieren, erhalten wir schließlich unsere Konjunktive Normalform

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r$$

Im nächsten Schritt beseitigen wir die Konunktionszeichen zugunsten von Beistrichen und beginnen wieder unsere Resolutionsregeln **RES** und **FAKT** (und **VER**) anzuwenden mit dem Ziel die leere Klausel — d.h. einen Widerspruch — herzuleiten:

$$\frac{\frac{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r}{\neg p \vee q, p, \neg q \vee r, \neg r} \text{VER}}{\frac{q, \neg q \vee r, \neg r}{r, \neg r} \text{RES}} \text{RES}$$

Hier noch eine Ableitung im Resolutionskalkül, die zeigt dass aus den Prämissen $p \vee q \vee \neg r, r$ und $r \rightarrow \neg q$ die Konklusion p folgt.

$$\frac{\frac{\frac{p \vee q \vee \neg r, r, \neg r \vee \neg q, \neg p}{p \vee q \vee \neg r, \neg r \vee \neg q, r, \neg p} \text{VER}}{p \vee \neg r \vee \neg r, r, \neg p} \text{RES}}{\frac{p \vee \neg r, r, \neg p}{p, \neg p} \text{FAKT}} \text{RES}$$

1.5 Metatheorie der AL

Informell haben wir uns schon das ganze Semester mit metatheoretischen Begriffen beschäftigt. Ganz grob kann man diese in zwei Klassen einteilen — in **semantische** und **syntaktische** Begriffe, wobei semantische Begriffe immer in irgendeiner Form mit *Wahrheit*, *Bedeutung*, *Interpretationen*, *Modellen* und dergleichen zu tun haben, während sich syntaktische Begriffe ausschließlich auf rein formale Aspekte beziehen (etwa auf die Gestalt von Zeichenreihen).

Der wichtigste semantische Begriff ist sicherlich der **semantische Folgerungsbegriff**. Wir erinnern uns, dass er definiert war über *Interpretationen*, i.e. Funktionen v , die jedem atomaren Satz einer gegebenen Sprache einen der beiden Wahrheitswerte w oder f zuordnet. Über die Auswertungsregeln für die aussagenlogischen Junktoren kann man dann, gegeben so eine Interpretation, jedem beliebig komplexen Satz, der sich aus atomaren Aussagen via der Junktoren zusammensetzt, einen Wahrheitswert zuordnen. Der semantische Folgerungsbegriff war dann wie folgt definiert:

Definition 7. α *folgt semantisch* aus der Satzmenge Σ (kurz: $\Sigma \models \alpha$) genau dann wenn für alle Interpretationen v gilt: wenn für alle Sätze β in Σ gilt, dass $\bar{v}(\beta) = w$, dann auch $\bar{v}(\alpha) = w$.

Mit anderen Worten: Ein Satz β folgt semantisch aus der Satzmenge Σ genau dann wenn α immer dann wahr ist, wenn auch alle Sätze in Σ wahr sind.

Ähnlich wichtig wie der Begriff der semantischen Folgerung ist der Begriff der **Erfüllbarkeit**:

Definition 8. Eine Satzmenge Σ heißt **erfüllbar** genau dann wenn es eine Interpretation v gibt, sodass für alle Sätze β in Σ gilt: $\bar{v}(\beta) = w$.

D.h. eine Menge von Sätzen Σ heißt erfüllbar genau dann wenn es irgendeine Belegung der atomaren Sätze mit Wahrheitswerten gibt, sodass alle Sätze in Σ dadurch wahr werden.

Der wichtigste syntaktische Begriff auf der anderen Seite ist der Begriff der **syntaktischen Folgerung** oder **Beweisbarkeit** oder **Ableitbarkeit**. Doch hier ist Vorsicht angebracht: “Den” syntaktischen Folgerungsbegriff gibt es eigentlich nicht: es

gibt eine ganze Fülle von (zueinander äquivalenten) syntaktischen Folgerungsbegriffen. Welcher gemeint ist, sollte aus dem Kontext zwar immer klar sein, aber eigentlich sollte man immer angeben, auf welchen konkreten Kalkül man sich bezieht, wenn man von “Ableitbarkeit” oder dgl. spricht. Das allgemeine Schema für eine Definition eines syntaktischen Folgerungsbegriffs könnte man aber so bestimmen (wobei mit K irgendein konkreter, rein syntaktisch definierter Kalkül gemeint ist):

Definition 9. α *folgt syntaktisch* $_K$ aus der Satzmenge Σ (kurz: $\Sigma \vdash_K \alpha$) genau dann wenn α mit den durch den Kalkül K festgelegten Regeln aus Σ herleitbar ist.

Z.B. erhält man aus diesem Definitionsschema eine konkrete Definition eines syntaktischen Folgerungsbegriffs, wenn man für K den *axiomatischen Kalkül* oder den *Kalkül des natürlichen Schließens* hernimmt.

Ein weiterer wichtiger syntaktischer Begriff ist der Begriff der **Konsistenz** – er ist bekanntlich wie folgt definiert (und muss ebenfalls wieder auf einen konkreten Kalkül K bezogen werden):

Definition 10. Eine Satzmenge Σ heißt *konsistent* $_K$ genau dann wenn aus Σ (in K) kein Widerspruch, i.e. kein Satz der Form $\beta \wedge \neg\beta$ ableitbar ist. (Das heißt wenn es keinen Satz β gibt, sodass $\Sigma \vdash_K \beta \wedge \neg\beta$.)

In der Metatheorie beschäftigt man sich nun (unter anderem) mit der folgenden Frage: in welchem Zusammenhang stehen die semantischen Begriffe der semantischen Folgerung und der Erfüllbarkeit mit den syntaktischen Begriffen der Ableitbarkeit und Konsistenz? Die zwei (bzw. vier) gewichtigsten Fragen, die man sich (bezüglich eines konkreten Ableitungskalküls K) nun fragen kann, sind die folgenden:

- F1. Wenn ein Satz α aus einer Menge von Sätzen Σ ableitbar ist, folgt er dann auch semantisch aus ihr?
- F2. Wenn ein Satz α aus einer Menge von Sätzen Σ semantisch folgt, ist er dann auch ableitbar aus ihr?

und analog:

- F1'. Wenn eine Satzmenge erfüllbar ist, ist sie dann auch konsistent?

F2'. Wenn eine Satzmenge konsistent ist, ist sie dann auch erfüllbar?

Auf die jeweils erste Frage hätte man sicherlich für JEDEN Kalkül gerne die Antwort: JA. Wieso? Man würde ungern aus einer Satzmenge Σ Sätze ableiten können, die *falsch* sind, obwohl die Prämissen möglicherweise wahr sind. Analog würde man ungern aus einer erfüllbaren Menge von Sätzen einen Widerspruch ableiten können. Dass dem tatsächlich *nicht* der Fall ist für die Kalküle, die wir kennengelernt haben, besagt der sogenannte **Korrektheitssatz**.

Definition 11. Ein Kalkül K heiße **korrekt** genau dann wenn gilt: Wenn $\Sigma \vdash_K \alpha$, dann $\Sigma \models \alpha$.

Tatsächlich gilt für den axiomatischen Kalkül Ax und den Kalkül des natürlichen Schließens KNS :

Satz 1. (Korrektheit des axiomatischen Kalküls)

Wenn $\Sigma \vdash_{Ax} \alpha$, dann $\Sigma \models \alpha$

und

Satz 2. (Korrektheit des Kalküls des natürlichen Schließens)

Wenn $\Sigma \vdash_{KNS} \alpha$, dann $\Sigma \models \alpha$

Wie könnte man den Korrektheitssatz für (etwa) den axiomatischen Kalkül beweisen? Nun ja, da man beweisen muss, dass immer dann wenn ein Satz α aus einer gegebenen Satzmenge Σ ableitbar ist, α auch semantisch aus Σ folgt, muss man im Prinzip nur folgendes tun: Man sieht sich alle Regeln und Axiome des axiomatischen Kalküls an und schaut sich an, ob

1. alle Axiome des Kalküls wahr sind und
2. alle Schlussregeln *wahrheitserhaltend* (d.h. von wahren Prämissen immer auf wahre Konklusionen führen).

Das ist aber sehr einfach einzusehen: 1. sind alle unsere Axiomeschemata *Tautologien*, und daher *immer* wahr. 2. aber ist die einzige Schlussregel im axiomatischen Kalkül, die zu prüfen ist, der *Modus Ponens*, i.e. die Regel, die uns erlaubt von α und $\alpha \rightarrow \beta$ auf β zu schließen und dass diese Regel wahrheitserhaltend ist, ist hoffentlich jedem sofort einsichtig. Angenommen also alle Sätze in Σ sind wahr. Wir müssen zeigen, dass – wenn α im axiomatischen Kalkül aus Σ ableitbar ist – auch α wahr ist. Aber das kann gar nicht anders sein! Denn die einzigen Sätze die wir ausser den wahren Σ -Sätzen verwenden dürfen sind aussagenlogische Axiome – und die sind immer wahr. Und unsere einzige Schlussregel führt von wahren Sätzen immer auf wahre Sätze.

Sehr viel schwieriger ist die zweite Frage von oben zu beantworten: Reicht ein gegebener Kalkül aus, um ALLE semantisch gültigen Argumente auch als gültig zu erweisen? D.h. lässt sich ein Satz α IMMER aus einer Satzmenge Σ (im Kalkül K) ableiten, wenn α aus Σ semantisch folgt? Die Antwort liefert der **Vollständigkeitssatz**.

Definition 12. Ein Kalkül K heiße **vollständig** genau dann wenn gilt:
Wenn $\Sigma \models \alpha$, dann $\Sigma \vdash_K \alpha$.

Tatsächlich gilt sowohl für den axiomatischen Kalkül Ax als auch den Kalkül des natürlichen Schließens KNS :

Satz 3. (Vollständigkeit Axiomatischer Kalkül)

Wenn $\Sigma \models \alpha$, dann $\Sigma \vdash_{Ax} \alpha$

und

Satz 4. (Vollständigkeit Kalkül des natürlichen Schließens)

Wenn $\Sigma \models \alpha$, dann $\Sigma \vdash_{KNS} \alpha$

Der Beweis für diese letzten beiden Sätze ist allerdings alles andere als trivial und erfordert einiges an zusätzlichen Überlegungen.

1.5.1 Exkurs: Beweis Vollständigkeitssatz

Kapitel 2

Prädikatenlogik – PL

2.1 Die Sprache der Prädikatenlogik

Bisher haben wir uns nur mit Aussagenlogik beschäftigt, d.h. wir haben Sätze als unanalysierte Einheiten angesehen. Die Möglichkeiten, die uns die Aussagenlogik zur Analyse von Argumenten (ist das vorgelegte Argument *semantisch gültig* oder nicht; ist es – in einem geeigneten Kalkül – *beweisbar* oder nicht) liefert, sind aber sehr beschränkt.

Man betrachte etwa folgendes Argument:

- A. Alle Menschen sind Säugetiere.
- B. Alle Säugetiere sind sterblich.
-
- C. Also sind alle Menschen sterblich.

Allem Anschein nach ist dieses Argument logisch gültig. Mit den Mitteln der Aussagenlogik lässt sich aber nicht einsehen, wieso das so sein sollte. Wir könnten etwa für die erste Prämisse den Aussagebuchstaben p wählen, für die zweite q (wir brauchen einen anderen Buchstaben, weil die beiden Prämissen ja verschieden sind) und für die Conclusio den Buchstaben r . Der Schluss von den Prämissen p und q auf die Conclusio r ist aber offensichtlich *nicht* gültig. Es fehlt hier einfach die Möglichkeit der genaueren Differenzierung *innerhalb* von Sätzen. Aussagenlogisch betrachtet haben die Sätze (1), (2) und (3) nichts gemeinsam.

Haben wir es mit Prädikaten zu tun, die nur endlich viele Instanzen haben, bzw. mit nur endlich vielen Gegenständen, über die wir sprechen wollen, können wir uns noch wie folgt behelfen: Wir fassen Satz (1) nicht als *einen* Satz auf, sondern wir analysieren ihn als Konjunktion von *vielen* Sätzen. Da es nur endlich viele Dinge gibt

über die wir hier sprechen wollen (nämlich alle Säugetiere und Menschen), könnten wir (1) etwa so formulieren: “Wenn Ding 1 ein Mensch ist, dann ist Ding 1 ein Säugetier *und* Wenn Ding 2 ein Mensch ist, dann ist Ding 2 ein Säugetier *und* ... Wenn Ding n ein Mensch ist, dann ist Ding n ein Säugetier”, wobei n eine hinreichend große natürliche Zahl ist. Auf ähnliche Weise könnten wir auch (2) und (3) analysieren und könnten dann mit aussagenlogischen Mitteln zeigen, dass das Argument gültig ist.

Die Probleme dieser Vorgehensweise sind offensichtlich: erstens ist diese Analyse enorm umständlich (Der einfache Satz “Alle Menschen sind Säugetiere” würde so dargestellt, als wäre es eine ewig lange Konjunktion von anderen Sätzen; also in Wahrheit ein Satz, der so lang wäre, dass vermutlich ein Menschenleben nicht ausreichen würde, um ihn aufzuschreiben); zweitens aber, und gewichtiger: Diese Analyse funktioniert nur dann, wenn der Bereich der Gegenstände, über die wir sprechen wollen (im konkreten Fall: den Bereich der Säugetiere/Menschen) *endlich* ist! Viele Bereiche, die wir mit logischen Mitteln erfassen wollen, erfüllen diese Bedingung aber nicht! Vor allem in der Mathematik haben wir es ständig mit Gegenstandsbereichen zu tun, die *unendlich* sind (die Menge der natürlichen Zahlen; Die Menge aller reellen, stetigen Funktionen; die Menge aller Punkte in der Ebene usw.).

Wir erweitern deshalb unsere aussagenlogische Sprache um neue Symbole, um Aussagen der Form “Alle Dinge sind ...” und “Es gibt Dinge, sodass ...” behandeln zu können.

Die wichtigsten neuen Symbole sind die sogenannten **Quantoren** \forall (Allquantor) und \exists (Existenzquantor) und unendlich viele *Gegenstandsvariablen* $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots$

Ausserdem erweitern wir unsere Sprache um unendlich viele **Relationssymbole** $P^1, Q^1, R^1, \dots, P^2, Q^2, R^2, \dots, P^3, Q^3, R^3, \dots$ verschiedenster Stelligkeit und unendlich viele **Konstantensymbole** $a, b, c, d, a_1, b_1, \dots$

(Die derart erweiterte Sprache ist in einem gewissen Sinne *maximal*: Wir haben unendlich viele Relations- und Konstantensymbole dazugenommen; die meisten Sprachen – auf jeden Fall die, die wir betrachten – sind aber *endlich*; wir wollen mit dieser Maximal-Definition der prädikatenlogischen Sprache nur sicherstellen, dass für jede beliebige konkrete Sprache, die wir modellieren wollen, genügend Symbole vorhanden sind. Wenn der Kontext klar ist, lassen wir oft die Stellen-Indizes weg und verwenden einfach Buchstaben P, Q, R, \dots)

Relationen verschiedener Stelligkeit sind auch in der natürlichen Sprache standard; die natürlich-sprachliche “Relation” “... ist ein Mensch” (der Begriff des “Mensch-Seins”) z.B. ist einstellig (einstellige Relationen nennt man meistens *Prädikate*). Durch Einsetzung eines Namens wird daraus ein vollständiger Satz. Setzen wir z.B. in die Leerstelle des Prädikatsausdrucks “... ist ein Mensch” den Namen “Günther

Eder” ein, so erhalten wir den (wahren) Satz “Günther Eder ist ein Mensch”. Ein Beispiel für eine zweistellige Relation wäre etwa die Relation “... ist kleiner als —”, d.h. wir erhalten einen vollständigen Satz, der wahr oder falsch sein kann, wenn wir in die Leerstellen “...” und “—” Namen für irgendwelche Gegenstände einsetzen. Z.B. liefert die Einsetzung “2” für die erste Leerstelle und “1” für die zweite den (falschen) Satz “2 ist kleiner als 1”. Es gibt auch 3- und mehrstellige Relationen (etwa “... legt — auf ***”), die in ähnlicher Weise durch Ergänzung durch Namen zu Sätzen werden.

Die Konstantensymbole sind dazu da, in unserer künstlichen Sprache *Namen für bestimmte ausgezeichnete Objekte* zur Verfügung zu haben, so wie es auch in natürlichen Sprachen Namen für bestimmte Gegenstände (Menschen, Haustiere, chemische Substanzen, Blumen, usw.) gibt.

Die Menge der Relationssymbole zusammen mit der Menge der Konstantensymbole nennt man auch die Menge der **nichtlogischen Konstanten**.

Die Menge der **Terme** oder **Individuensymbole** ist die Menge der Variablen zusammen mit der Menge der Konstantensymbole.

Da wir unsere Sprache erweitert haben, brauchen wir auch neue Klauseln, die uns sagen, was eine **wohlgeformte Formel** unserer neuen Sprache ist.

- Definition 13.** *i. falls P^n ein n -stelliges Relationssymbol ist und t_1, \dots, t_n Terme (d.h. Individuenkonstanten oder Gegenstandsvariablen), so ist $P^n t_1 \dots t_n$ eine wohlgeformte Formel*
- ii. falls α eine wohlgeformte Formel ist und x eine Gegenstandsvariable, so sind auch $\forall x \alpha$ und $\exists x \alpha$ wohlgeformte Formeln*
- iii. falls α und β wohlgeformte Formeln sind, so auch $\neg \alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ und $(\alpha \rightarrow \beta)$*
- iv. Nichts sonst ist eine wohlgeformte Formeln, wenn nicht durch endlich-ofte Anwendung der Regeln 1. - 3. erzeugt*

Wie auch schon früher handelt es sich hierbei um eine rekursive Definition. Klauseln 1. und 2. tragen unserer erweiterten Sprache Rechnung und Klausel 3. dem Umstand, dass es sich um eine Erweiterung der aussagenlogischen Sprache handelt; d.h. wir können mittels der aussagenlogischen Bildungsregeln aus prädikatenlogischen Formeln neue prädikatenlogische Formeln erzeugen (mittels der aussagenlogischen Junktoren).

Wie schon im Falle der Aussagenlogik können wir diese künstliche Sprache nun benutzen, um Aussagen aus der Umgangssprache auf deren logisches Verhalten zu

prüfen – z.B. darauf, ob ein bestimmter Satz *immer wahr* oder ein Argument *gültig* ist (dazu brauchen wir noch eine geeignete Semantik, zu der wir später kommen werden).

Wir sehen uns das Beispiel vom Beginn dieses Kapitels noch einmal an; es lautete:

- A. Alle Menschen sind Säugetiere.
 - B. Alle Säugetiere sind sterblich.
-
- C. Also sind alle Menschen sterblich.

Bei einer Formalisierung (d.i. einer Übersetzung von umgangssprachlichen Sätzen in unsere künstliche Sprache) ist prinzipiell folgendes zu beachten: Jedem Namen muss ein Konstantensymbol zugeordnet werden; jedem einstelligem Prädikat ein einstelliges Relationszeichen, jeder zweistelligen Relation ein zweistelliges Relationszeichen usw. Kommen Wendungen vor wie “alle ... sind...” oder “es gibt ... sodass ...”, so muss dies durch geeignete Verwendung der Quantoren \forall und \exists übersetzt werden. Dem muss oft eine Analyse des umgangssprachlichen Satzes vorhergehen.

Nehmen wir etwa Satz (1) von oben: Die primitiven, einfachen Prädikate, die darin vorkommen, sind die Prädikate “... ist ein Mensch” und “... ist ein Säugetier”. Es handelt sich bei beiden um einstellige Prädikate. Wir wählen zur Formalisierung also zwei einstellige Prädikatszeichen – etwa P^1 und Q^1 . “Alle Menschen sind Säugetiere” kann analysiert werden als: “Für jedes Ding gilt: wenn dieses Ding ein Mensch ist, dann ist es ein Säugetier.” Den Ausdruck “für jedes Ding gilt” übersetzen wir mit “ $\forall x$ ”. Bei der restlichen Aussage handelt es sich um ein Konditional: “*wenn* dieses Ding ein Mensch ist, *dann* ist es ein Säugetier”. Die darin vorkommenden Ausdrücke “dieses Ding” und “es” verweisen zurück auf den Ausdruck “jedes Ding” – d.h. wir verwenden für die Symbolisierung dieses komplexen Ausdrucks dieselbe Variable x , die auch in der Übersetzung von “für jedes Ding gilt” (nämlich “ $\forall x$ ”) vorkommt.

Nach unserer Wahl der einstelligen Relationsausdrücke lautet unsere Übersetzung demnach $\forall x(P^1x \rightarrow Q^2x)$, i.e. “für jedes Ding x gilt: wenn x ein Mensch ist, dann ist x ein Säugetier”.

Oft will man die Quantoren beschränken und nicht von *allen* Dingen sprechen, sondern nur von allen Dingen *bestimmter Art*, z.B. von allen *Menschen*, oder allen *Tieren*, oder allen Menschen *eines bestimmten Alters*.

Angenommen etwa, wir wollen in einem bestimmten Kontext nur über *Menschen* sprechen, dann bedeuten die Quantoren \forall und \exists nicht “für jedes Ding” und “es gibt Dinge”, sondern “jeder Mensch” (oder einfach “jede/r”) und “einige Menschen” (oder einfach “einige”).

Betrachten wir etwa folgenden Satz:

(A) Jeder Mensch mag Susi Schmalspiel

Zunächst sehen wir uns an, welche nichtlogischen Ausdrücke (A) enthält und erkennen: es kommt der *Name* “Susi Schmalspiel” darin vor und die zweistellige Relation “... mag —”. Wir wählen für unsere Formalisierung für “Susi Schmalspiel” das Konstantensymbol a und für die zweistellige Relation “... mag —” das zweistellige Relationszeichen P^2 . Weil der Quantor in diesem Fall auf Menschen beschränkt ist, können wir (A) wie folgt analysieren: “für jeden Menschen gilt: er/sie mag Susi Schmalspiel”, was in unserer formalen Sprache so aussieht:

(A') $\forall x P^2 x a$

Oder Halb-formal: “Für alle Menschen x gilt: x mag Susi Schmalspiel”. Allgemein empfiehlt es sich, bei der Formalisierung von umgangssprachlichen Sätzen so vorzugehen, dass man sich zunächst ansieht, welches nicht-logische Vokabular im gegebenen Satz vorkommt (in den bisherigen Beispielen etwa die Prädikate “... ist sterblich”, “... ist ein Mensch”, die Relation “... mag —” und die Individuenkonstante “Susi Schmalspiel”). Dann wählt man geeignete Symbole der künstlichen Sprache als “Übersetzungen” dieser nichtlogischen Ausdrücke. Um sich die logische Struktur eines Satzes klarzumachen sollte man den Satz in eine “halb-formale” Form bringen: Im ersten Beispiel etwa: “für alle Dinge x gilt: wenn x ein Mensch ist, dann ist x sterblich” und im zweiten Beispiel: “für alle Dinge x gilt: x mag a ”. Man sollte seine Intuitionen befragen, ob diese “halb-formale” Variante wirklich dem ursprünglichen Satz entspricht – d.h. denselben Sinn hat. Falls dem so sein sollte, dürfte der Rest ein Kinderspiel sein.

2.1.1 Übungsbeispiele

Im folgenden seien die Quantoren $\forall x$ und $\exists x$ immer auf Menschen beschränkt, d.h. $\forall x$ bedeutet im folgenden immer “Für alle Menschen x gilt” und $\exists x$ bedeutet “Für einige Menschen x gilt” oder “Es gibt mindestens einen Menschen x , für den gilt...”.

Hier eine Liste der Individuenkonstanten, Prädikate und Relationen, die in den folgenden Sätzen vorkommen werden:

Joshua... j

Dave... d

Nick ... n

Troy ... t
 x ist ein Musiker ... Mx
 x ist Musik-Kritiker ... Kx
 x mag y ... Rxy

Formalisieren sie unter den gegebenen Festsetzungen die folgenden Aussagen prädikatenlogisch. (Einige der Beispiele sind schon recht kompliziert. Gehen sie also langsam vor und versuchen sie sich zunächst den Gehalt der Aussage und seine logische Struktur klarzumachen!)

1. Joshua und Nick mögen sich nicht.
2. Joshua mag Dave und der mag Nick.
3. Jeder Musiker mag Joshua.
4. Kein Kritiker, der Joshua mag, mag Nick nicht.
5. Jeder Kritiker, der auch Musiker ist, mag Dave.
6. Einige Kritiker, die alle Musiker mögen, mögen Troy.
7. Einige Kritiker mögen überhaupt niemanden.
8. Alle Kritiker, die irgendwen mögen, mögen Joshua.
9. Jeder Musiker, der einen Kritiker mag, mag Nick nicht.
10. Wenn jeder Kritiker Dave mag, dann gibt es keinen der ihn nicht mag.
11. Wenn es einen Musiker gibt, der alle Kritiker mag, dann wird jeder Kritiker von irgendjemandem gemocht.
12. Kein Kritiker, der sich selbst mag, mag Dave nicht.
13. Alle Musiker sind selbstverliebt.

Die Lösungen gibt es hier: 3.1

2.2 Semantik der PL

Wie schon in der Semantik für die AL, geht es in der Semantik der Prädikatenlogik (PL) um die Bedeutung unserer wohlgeformten Zeichenreihen. Die Semantik der AL war ziemlich einfach: sie bestand einfach in einer Bewertungsfunktion v , die jedem Satzbuchstaben einen der beiden Wahrheitswerte zugeordnet hat, und für deren Erweiterung \bar{v} Einschränkungen galten wie: $\bar{v}(p \wedge q) = w$ genau dann wenn $\bar{v}(p) = w$ und $\bar{v}(q) = w$ (i.e. eine Konjunktion ist wahr genau dann wenn beide Konjunkte wahr sind); $\bar{v}(\neg p) = w$ genau dann wenn $\bar{v}(p) = f$. Ähnliches galt auch für die anderen Junktoren \vee und \rightarrow .

Wegen der sehr viel größeren Ausdrucksstärke der PL im Vergleich zur AL ist nun aber auch die Semantik der PL um einiges komplexer. Das Ziel ist aber das Gleiche: Wir wollen, dass jeder wohlgeformte Satz der PL einen der zwei Wahrheitswerte hat – er soll wahr oder falsch sein *bzgl. einer bestimmten Interpretation der nichtlogischen Ausdrücke, die in diesem Satz vorkommen*.

Dass die Semantik der PL wesentlich komplexer als die der AL ist, liegt vor allem an den Quantoren – wir müssen uns also überlegen, was wir mit diesen anfangen.

Ein Beispiel: Ist der wohlgeformte PL-Satz “ $\forall x(Px \wedge Rxa)$ ” wahr oder falsch?!

Auf diese Frage wird man antworten: Naja, das kommt darauf an.. Was bedeutet denn hier der Prädikatsbuchstabe P ? Für welche Relation steht R und welches Individuum bezeichnet der Name a ? Vor allem aber: Was heißt hier überhaupt $\forall x$? Was sind “alle x ”? – alle Menschen, Blumen, Bücher oder wie?!

Man sieht: die Wahrheit eines Satzes hängt von verschiedenen Dingen ab.

- a.) Was ist der *Bereich* (oder die *domain*) der Quantoren, d.i. was bedeutet $\forall x$?
- b.) Was bedeuten die nichtlogischen Zeichen? (Im Beispiel: R , P und a)

Das führt zu folgender Definition:

Definition 14. Ein **PL-Modell** \mathfrak{A} ist ein geordnetes Paar (A, I) , bestehend aus einer nichtleeren Menge A (der *domain*, *Bereich*, *Universum der Dinge*, über die man sprechen will) und einer Funktion I , die jedem nichtlogischen Zeichen eine Bedeutung zuordnet.

Für die Interpretationsfunktion I soll gelten:

- i. Falls P ein n -stelliges Relationszeichen ist, so ist $I(P) \subseteq A^n$. (Erklärung folgt)
- ii. Falls a eine Individuenkonstante ist, so ist $I(a) \in A$.

Die zweite Bedingung sollte klar sein: Jeder Name a soll ein Ding bezeichnen, das in der *domain* liegt, d.h. in der Menge aller Dinge, über die wir im konkreten Fall sprechen wollen.

Für die erste Bedingung sehen wir uns zunächst den Spezialfall $n = 2$ an, i.e. wir haben es mit einem zweistelligen Relationszeichen R zu tun. Unsere Interpretationsfunktion muss nun diesem Zeichen R eine Teilmenge von A^2 , d.i. $A \times A$ zuordnen. A^2 bezeichnet hier das (zweifache) kartesische Produkt von A mit sich selbst; und das ist nichts anderes als die Menge aller geordneten Paare, deren Komponenten jeweils aus A sind.

Beispiel: Für die Menge $A := \{1, 2\}$ ist das kartesische Produkt A^2 die Menge aller geordneten Paare (x, y) , wobei x und y jeweils aus A sind, d.i.: $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$.

Falls unser “Redebereich” (unsere *domain*) also durch die Menge $A := \{1, 2\}$ gegeben ist, so muss die Interpretationsfunktion I einem zweistelligen Relationszeichen R eine Teilmenge $I(R)$ der Menge $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$ zuordnen (diese kann auch leer sein).

Für den Fall, dass die Relation P einstellig ist ($n = 1$ und wir haben es mit einem *Prädikat* zu tun), gilt demnach, dass die $I(P)$ eine Teilmenge der *domain* A sein muss (d.i. $I(P) \subseteq A$).

Ähnliches gilt für allgemeines n : Jedem n -stelligen Relationszeichen wird durch die Interpretationsfunktion I eine Teilmenge des n -fachen kartesischen Produktes von A zugeordnet, i.e. eine Menge von geordneten Paaren, deren Komponenten sämtlich aus A sind.

Zurück zum Beispiel von oben: Wir hatten es dort mit dem Satz “ $\forall x(Px \wedge Rxa)$ ” zu tun (und nehmen an, dass es in der konkreten Sprache, mit der wir es zu tun haben, keine anderen nichtlogischen Zeichen ausser P, R und a gibt).

Um den Wahrheitswert dieser Aussage zu bestimmen, müssen wir – gemäß obiger Definition – ein bestimmtes Modell \mathfrak{A} betrachten und *bezüglich dieses Modells* bestimmen, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

Wir betrachten etwa das Modell $\mathfrak{A}_1 := (A, I)$, wobei die domain A durch $\{Martin, Thomas, Hilde\}$ festgelegt ist. Die Interpretationsfunktion I ordne dem Prädikat P die Menge $I(P) := \{Martin, Thomas, Hilde\}$ zu; der Relation R werde die Menge von geordneten Paaren $I(R) := \{(Martin, Hilde), (Thomas, Hilde)\}$ zugeordnet; und der Name a bezeichne

$I(a) = \text{Hilde}$.

Der Satz " $\forall x(Px \wedge Rxa)$ " ist nun *wahr im Modell* \mathfrak{A}_1 falls für jedes Ding m in der domain A folgendes gilt: m liegt in $I(P)$ und das geordnete Paar (m, Hilde) liegt in $I(R)$.

Nun stimmt es zwar das alle Dinge in der domain A in $I(P)$ liegen, aber es gilt nicht, dass für jedes m in der domain auch (m, Hilde) in $I(R)$ liegt, denn das Paar $(\text{Hilde}, \text{Hilde})$ liegt *nicht* in der Interpretation von R , d.i. liegt nicht in $I(R)$.

Der Satz " $\forall x(Px \wedge Rxa)$ " ist also *in diesem Modell* \mathfrak{A}_1 *falsch*!

Betrachten wir nun das Modell $\mathfrak{A}_2 := (A', I')$: die domain A' sei dieselbe wie oben, d.i. $\{\text{Martin}, \text{Thomas}, \text{Hilde}\}$. Die Interpretationsfunktion sei ebenfalls genau gleich, nur dass der Relation R nun die Menge $I'(R) := \{(\text{Martin}, \text{Hilde}), (\text{Thomas}, \text{Hilde}), (\text{Hilde}, \text{Hilde})\}$ zugeordnet werde.

In *diesem Modell* \mathfrak{A}_2 ist nun der Satz " $\forall x(Px \wedge Rxa)$ " tatsächlich *wahr*!

Wir müssen uns auch die Frage stellen, was mit wohlgeformten Formeln ist, die keine Sätze sind. D.i. mit Formeln, die *freie Variable* (Variablen, die nicht durch Quantoren gebunden sind) enthalten. Was für einen Wahrheitswert sollte z.B. die Formel $\forall x(Rxy)$ in einem unserer Modelle \mathfrak{A}_1 oder \mathfrak{A}_2 von oben haben?! y ist hier eine freie Variable – bleibt also von der Interpretationsfunktion I unberührt. Die wohlgeformte Formel $\forall x(Rxy)$ macht also gar keine Aussage, weil nicht klar ist, für was die freie Variable y stehen soll.

Wir definieren aus diesem Grund eine Funktion s , die *jeder* Variable einen Wert aus der domain A zuordnet. So eine Funktion nennen wir eine *Belegung*. Weiters definieren wir eine Fortsetzung \bar{s} dieser Funktion wie folgt:

Definition 15. *Es sei s eine Belegung; dann ist die Fortsetzung von s auf alle Individuenterme (d.i. Variablen plus Konstanten) gegeben durch:*

- i. $\bar{s}(\alpha) := s(\alpha)$ falls α eine Variable ist und
- ii. $\bar{s}(\alpha) := I(\alpha)$ falls α eine Individuenkonstante ist

Kurz: Die Fortsetzung der Belegung s bleibt für Variablen gleich (sie soll ja eine *Fortsetzung* sein), ordnet nun aber auch *Individuenkonstanten*, d.i. *Namen* (also a, b, c, \dots) ein Element aus der domain zu. (Wofür das alles gut ist, wird sich hoffentlich bald zeigen)

Wir nennen dann ein Paar (\mathfrak{A}, s) , bestehend aus einem Modell \mathfrak{A} und einer Belegung s eine **vollständige Interpretation** oder einfach **Interpretation**. (Man beachte: Die Terminologie ist hier uneinheitlich. Oft sagt man auch zu dem, was hier “Interpretation” genannt wird, “Modell”. Oft nennt man das, was hier “Modell” genannt wurde eine “Struktur”. Oft verwendet man das Wort “Modell” auch für *beides* und unterdrückt die Rede von “Belegungen”. Es ist also immer auf den jeweiligen Kontext zu achten.)

Nun eine der wichtigsten Definitionen (wieder einmal handelt es sich um eine *rekursive* Definition):

Definition 16. *Es sei eine Interpretation (\mathfrak{A}, s) gegeben. Dann gilt für alle wohlgeformten Formeln α :*

1. *Falls α atomar ist, d.i. der Form $Pt_1 \dots t_n$ für ein n -stelliges Prädikat P und Terme t_1, \dots, t_n , so ist α wahr in (\mathfrak{A}, s) gdw. $(s(t_1), \dots, s(t_n)) \in I(P)$*
2. *Falls α, β wohlgeformte Formeln sind, so gilt:*
 - (a) *$\neg\alpha$ ist wahr in (\mathfrak{A}, s) gdw. α in (\mathfrak{A}, s) falsch ist.*
 - (b) *$\alpha \wedge \beta$ ist wahr in (\mathfrak{A}, s) gdw. α und β beide in (\mathfrak{A}, s) wahr sind.*
 - (c) *$\alpha \vee \beta$ ist wahr in (\mathfrak{A}, s) gdw. α oder β (oder beide) in (\mathfrak{A}, s) wahr sind.*
 - (d) *$\alpha \rightarrow \beta$ ist wahr in (\mathfrak{A}, s) gdw. α in (\mathfrak{A}, s) falsch ist oder β in (\mathfrak{A}, s) wahr ist (oder beides).*
3. *Falls α der Form $\forall x\beta$ ist, so ist α in (\mathfrak{A}, s) wahr gdw. für alle Belegungen s' , die sich von s höchstens bzgl. der Variable x unterscheiden, gilt: β ist wahr in (\mathfrak{A}, s') .*
4. *Falls α der Form $\exists x\beta$ ist, so ist α in (\mathfrak{A}, s) wahr gdw. es eine Belegung s' gibt, die sich von s höchstens bzgl. der Variable x unterscheidet, so dass gilt: β ist wahr in (\mathfrak{A}, s') .*

Man beachte, dass, falls es sich bei der Formel α Formeln in um einen *Satz* handelt (also eine Formel *ohne* freie Variablen), man auch einfach sagen könnte: α ist wahr in \mathfrak{A} . Die Belegung s spielt für einen *Satz* sozusagen keine Rolle. (Man mache sich klar, warum!)

Diese Definition – vor allem die letzten beiden Punkte – sieht unnötig kompliziert aus – sie ist aber streng genommen notwendig, um die Semantik von Aussagen, die Quantoren enthalten, richtig zu handhaben.

Um ein richtiges Verständnis der Semantik quantifizierter Aussagen zu bekommen, sollte man sich klar machen, *wieso* diese Definition so eine komplizierte Form annimmt. Will man verstehen, wie (und warum) diese Definition funktioniert, ist es ratsam, sich den Wahrheitswert einiger Sätze mittels dieser Definitionen explizit “auszurechnen”. (Wir werden aber in den Übungsbeispielen darauf verzichten, die Definitionen wirklich 1:1 anzuwenden).

Inhaltlich sagt die Definition (Punkt 3) *de facto* nicht viel mehr als folgendes: Wenn $\phi(x)$ eine komplexe Formel mit der freien Variable x ist (also z.B. etwas wie $Px \wedge \forall z(Rxz) \wedge Qx$), so ist die Aussage $\forall x\phi(x)$ wahr in (\mathfrak{A}, s) genau dann wenn die Menge, die durch die Formel $\phi(x)$ definiert wird, *jedes Ding* in der domain A als Element enthält. (was ja auch zu erwarten ist von jeder solchen Definition)

Nach dieser Definition sind wir nun auch in der Lage, den wichtigsten semantischen Begriff zu definieren, den die PL zu bieten hat – den Begriff der *logischen* oder *semantischen Folgerung*.

Man erinnere sich: Für die AL war der Begriff der semantischen Folgerung folgendermaßen charakterisiert: Ein Satz α folgt semantisch aus einer Menge von Sätzen Σ gdw. für alle aussagenlogischen Modell (das waren die *Bewertungsfunktionen*, die v ’s) gilt: wenn alle Sätze in Σ wahr sind, so ist auch α wahr. Ganz analog funktioniert das auch für die PL:

Definition 17. Wenn Σ eine Menge von PL-Formeln ist und α eine PL-Formel, so **folgt** α **logisch** aus der Menge von Formeln Σ gdw. für alle Interpretationen (\mathfrak{A}, s) gilt: wenn alle Sätze in Σ wahr in der Interpretation (\mathfrak{A}, s) sind, so ist auch α wahr in (\mathfrak{A}, s) .

In diesem Fall schreiben wir (wie auch in der Aussagenlogik): $\Sigma \models \alpha$

Falls α und β Sätze sind, so schreiben wir auch $\alpha \models \beta$, falls β aus α logisch (d.i. semantisch) folgt. $\alpha \models \beta$ bedeutet dann definitionsgemäß nichts anderes als: β ist in allen Interpretationen wahr, in denen auch α wahr ist. Um also zu zeigen, dass ein Satz β nicht aus einem anderen Satz α folgt, ist es hinreichend eine Interpretation anzugeben, in der α wahr ist, β aber falsch.

Beispiel: Wir wollen zeigen, dass aus $\alpha := \forall x(Px \vee Qx)$ *nicht* folgt, dass $\beta := \forall xPx \vee \forall yQy$. Dazu wählen wir Als Interpretation das Modell \mathfrak{A} dessen domain die Menge $A = \{1, 2, 3\}$ ist. Die Interpretationsfunktion I definieren wir durch $I(P) =$

$\{1, 2\}$ und $I(Q) = \{3\}$. (Weil in den beiden Sätzen keine Variablen frei vorkommen, spielt die Belegungsfunktion s keine Rolle). In diesem Modell ist α wahr, aber β falsch. (Man überlege sich, warum!)

Damit ist gezeigt, dass β nicht semantisch aus α folgt.

2.2.1 Übungsbeispiele

Gib für jeden Satz eine Interpretation an, in der er wahr ist und eine, in der er falsch ist.

1. $\forall x(Mxa \vee Mxb)$
2. $\exists x(\neg Px \wedge \neg Qx)$
3. $\forall x(Px \rightarrow \exists y(Py \wedge Mxy))$
4. $\exists x\forall y(Py \rightarrow Mxy)$
5. $\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow Mxy))$
6. Folgt aus den ersten beiden Sätzen der dritte semantisch?
 - i. $\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
 - ii. $\forall x\exists yRxy$
 - iii. $\exists xRxx$

(Hinweis: Gibt es eine Interpretation in der sowohl (1), als auch (2), als auch die *Negation* von (3) (also $\neg\exists xRxx$) wahr sind? Falls ja, dann kann (3) *nicht* semantisch aus (1) und (2) folgen, denn dazu müsste (3) ja in jedem Modell wahr sein (d.h. nicht-(3) falsch), in dem auch (1) und (2) wahr sind. Siehe auch das Beispiel in den Folien zur 6. Einheit.)

Welche der folgenden Sätze sind erfüllbar? (Begründe deine Entscheidung durch Angabe geeigneter Modelle, bzw. argumentiere informell, wieso der Satz nicht erfüllbar ist.)

7. $\exists x\forall y(\neg Myy \rightarrow Mxy)$
8. $\exists x\forall y(Mxy \rightarrow \neg Myy)$
9. $\exists x\forall y(Mxy \leftrightarrow \neg Myy)$

2.3 Kalkül des natürlichen Schließens für PL

Wie für die Aussagenlogik, gibt es auch für die Prädikatenlogik Kalküle, mit denen man mit Hilfe von Zeichenmanipulationsregeln aus gegebenen Prämissen eine bestimmte Konklusion ableiten kann.¹

Hier eine Zusammenstellung der Regeln für die Quantoren:

\forall -Beseitigungsregel:

...	
$\forall x\phi$	
...	
$\phi(a/x)$	\forall -B
...	

Hier steht $\phi(a/x)$, für die Formel, die man aus ϕ bekommt, indem man alle Vorkommnisse der Variable x in ϕ durch a ersetzt. Die Regel besagt also: Wenn etwas für alle Dinge gilt, dann gilt es für jedes einzelne Ding a . Etwas schwieriger die Einführungsregel für den Allquantor:

\forall -Einführungsregel:

...	
$\phi(a/x)$	
...	
$\forall x\phi$	\forall -E
...	

Die Regel besagt intuitiv: Wenn ich für ein *beliebig* gewähltes Ding a zeigen kann, dass ϕ von diesem Ding gilt, dann muss ϕ für *alle* Dinge gelten. Damit die Regel sinnvoll ist und der Forderung gerecht wird, dass a *beliebig* ist, sind folgende Einschränkungen entscheidend:

¹Für die Prädikatenlogik sind solche Kalküle sogar noch wichtiger als für die Aussagenlogik, weil es hier kein Entscheidungsverfahren für semantische Gültigkeit / semantische Folgerung gibt.

- i. Der Name a darf in keiner Annahme vorkommen und
- ii. a darf im quantifizierten Satz $\forall x\phi$ nicht mehr vorkommen.

\exists -Einführungsregel:

...	
$\phi(a/x)$	
...	
$\exists x\phi$	\exists -E
...	

Diese Regel ist wieder einfacher: Wenn ich von einem konkreten Ding a zeigen kann dass ϕ von diesem Ding gilt, dann muss es *irgendein Ding* (i.e. mindestens eines) mit der Eigenschaft ϕ gelten. Schwieriger wieder die *Beseitigungsregel* für den Existenzquantor:

\exists -Beseitigungsregel:

...	
$\exists x\phi$	
$\phi(a/x)$	
...	
γ	
γ	\exists -B
...	

Die Regel besagt also Folgendes: Wenn ich

- (1) zeigen kann dass es *mindestens* ein Ding mit der Eigenschaft ϕ gibt und ich
- (2) zeigen kann, dass aus $\phi(a)$ (für a *beliebig* gewählt) irgendein Satz γ folgt

so kann ich (mit der \exists -Beseitigungsregel) zeigen, dass γ schon *aus der Existenzbehauptung alleine* folgt – ausser der Tatsache, dass dieses beliebig gewählt a ein ϕ ist, wurde ja nichts spezielles über a vorausgesetzt.

Damit diese “Beliebigkeitseigenschaft” nicht verletzt ist, müssen wir die Regel wieder geeignet einschränken und verlangen

- i. dass a in keiner Annahme vorkommt (ausser natürlich der Annahme $\phi(a/x)$ aus der wir ja etwas folgern wollen)
- ii. dass a nicht in $\exists x\phi$ vorkommt und
- iii. dass a nicht in γ vorkommt.

Hier einige Beispiele für korrekte Ableitungen:

1		$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	P
2		$\forall x(Qx \rightarrow Sx)$	P
3		Pa	A
4		$Pa \rightarrow Qa$	\forall -B 1
5		Qa	\rightarrow -B 3, 4
6		$Qa \rightarrow Sa$	\forall -B 2
7		Sa	\rightarrow -B 5, 6
8		$Pa \rightarrow Sa$	\rightarrow -E 3 - 7
9		$\forall x(Px \rightarrow Sx)$	\forall -E 8

(Alle Menschen sind Säugetiere und alle Säugetiere sind sterblich, also)

1	$\forall x(Px \wedge Qx)$	P
2	$Pa \wedge Qa$	\forall -B 1
3	Pa	\wedge -B 2
4	$\forall xPx$	\forall -E 3
5	Qa	\wedge -B 2
6	$\forall xQx$	\forall -E 5
7	$\forall xPx \wedge \forall xQx$	\wedge -E 4, 6

1	$\exists x\forall yRxy$	P
2	$\forall yRay$	A
3	Rab	\forall -B 2
4	$\exists xRxb$	\exists -E 3
5	$\exists xRxb$	\exists -B 1 - 4
6	$\forall y\exists xRxy$	\forall -E 5

(Das ist ein formaler Beweis für das, was schon jeder weiß: Wenn es jemanden gibt, der alle mag, dann wird jeder von jemandem gemocht.)

1	$\exists x(Px \vee Qx)$	P
2	$Pa \vee Qa$	A
3	Pa	A
4	$\exists xPx$	\exists -E 3
5	$\exists xPx \vee \exists xQx$	\vee -E 4
6	Qa	A
7	$\exists xQx$	\exists -E 6
8	$\exists xPx \vee \exists xQx$	\vee -E 7
9	$\exists xPx \vee \exists xQx$	\vee -B 2 - 8
10	$\exists xPx \vee \exists xQx$	\exists -B 1 - 9

(Hier wurde statt der offiziellen \forall -Beseitigungsregel unsere inoffizielle verwendet. Wer will, kann den Beweis so umformulieren, dass nur die offizielle Regel gebraucht wird. Ausserdem taucht hier der Name a in einer zusätzlichen Annahme (ausser $Pa \vee Qa$) auf – das ist aber offenbar kein Problem. Eine bessere Einschränkung wäre also: a darf in keiner Annahme *ausserhalb des Unterbeweises* vorkommen, den wir mit $\phi(a/x)$ eröffnen.)

1	$\forall x \neg Px$	P
2	$\exists x Px$	A
3	Pa	A
4	$\neg Pa$	\forall -B 1
5	$Pa \wedge \neg Pa$	\wedge -E 3, 4
6	\perp	ExFQ
7	\perp	\exists -B 2 - 6
8	$\neg \exists x Px$	\neg -E 2 - 7

(Hier wurde das sogenannte *Falsum* (\perp) verwendet, das für einen beliebigen Widerspruch (bzw. “konstant für das Falsche”) steht. Man könnte auch einen konkreten *anderen* Widerspruch hinschreiben (das geht mit dem Ex Falso Quodlibet) – wir müssen aber sicherstellen, dass a im Widerspruch nicht auftaucht. Siehe die dritte Einschränkung für die \exists -Beseitigungsregel oben.)

Hier nun ein paar Beispiele für *falsche* Ableitungen. In jedem Beispiel wurde eine der einschränkenden Bedingungen von oben verletzt:

1	$\forall x Rxa$	P
2	$\forall y \forall x Rxy$	\forall -E 1

Jedem ist hoffentlich klar, dass diese Ableitung falsch sein muss. Daraus, dass jeder George Clooney mag, folgt nicht, dass jeder jeden mag. Hier wurde die erste einschränkende Bedingung für die Allquantor-Einführungsregel verletzt, weil a in einer Annahme (bzw. Prämisse) auftaucht.

1		$\forall x Rxx$	P
2		Raa	\forall -B
3		$\forall x Rxa$	\forall -E 2

Wieder ist klar, dass etwas schief gelaufen sein muss: Nur weil jeder sich selbst mag, muss nicht jeder Orson Welles mögen. Hier wurde die zweite Bedingung verletzt: nicht jedes Vorkommenis der Variable a wurde quantifiziert, sodass a in der Conclusio der Anwendung der Einführungsregel noch vorkommt.

1		$\neg Ga$	P
2		$\exists xGx$	\forall -B P
3			Ga
4			$Ga \wedge \neg Ga$
5		$Ga \wedge \neg Ga$	\exists -B 2 - 4

Dass aus den beiden Sätzen “Josh spielt nicht Bass” und “Irgendjemand spielt Bass” ein Widerspruch folgt, wird wohl niemand glauben. Hier wurde in der Annahme $\phi(a/x)$ der Name a gerade *nicht beliebig* gewählt – es wurde vorher schon eine spezifische Annahme über a gemacht, nämlich $\neg Ga$. Bedingung 1 von oben ist also verletzt. (Tatsächlich auch noch eine weitere – welche!?)

1		$\forall y \exists x Rxy$	P
2		$\exists x Rxa$	\forall -B 1
3		Raa	A
4		$\exists x Rxx$	\exists -E 4
5		$\exists x Rxx$	\exists -B 1 - 4

Daraus, dass jeder von jemandem gemocht wird, können wir offenbar nicht schließen, dass es jemanden gibt, der sich selbst mag. Der Fehler in der Anwendung der \exists -Beseitigungsregel liegt darin, dass der Name a in der quantifizierten Formel in der zweiten Zeile vorkommt, d.h. Bedingung 2 von oben verletzt ist.

1		$\forall x(Px \vee Qx)$	P	
2		$\exists x\neg Px$	P	
3			$\neg Pa$	A
4			$Pa \vee Qa$	\forall -B 1
5			Qa	\vee -B 3,4
6		Qa	\exists -B 2 - 4	

Jeder ist ein Mann oder eine Frau. Irgendjemand ist kein Mann. Also ist Max eine Frau!? Hier ist offenbar die dritte Bedingung verletzt – d.h. in der Formel, auf die wir schließen wollen (γ von oben), kommt der Name a vor.

Aus diesem *falschen* Beweis von Qa können wir aber einen *korrekten* Beweis von $\exists xQx$ machen:

1		$\forall x(Px \vee Qx)$	P	
2		$\exists x\neg Px$	P	
3			$\neg Pa$	A
4			$Pa \vee Qa$	\forall -B 1
5			Qa	\vee -B 3,4
6			$\exists xQx$	\exists -E 5
7		$\exists xQx$	\exists -B 2 - 5	

(Wenn jeder in einem eigenen Haus oder einer Wohnung lebt und einige Leute nicht in einem eigenen Haus leben, dann muss es Leute geben, die in einer Wohnung leben.)

Der Name a taucht jetzt nicht mehr in der Formel γ (i.e. $\exists xQx$) auf – alles passt bestens.

2.3.1 Übungsbeispiele

Kapitel 3

Anhang

3.1 Lösungen zu den Übungsbeispielen

3.1.1 Lösungen zu den Beispielen aus Abschnitt 1.4.4

1.

1		$p \rightarrow \neg p$	P
2			p A
3			$\neg p$ \rightarrow -B 1,2
4			$p \wedge \neg p$ \wedge -E 2, 3
5		$\neg p$	\neg -E 2 - 4

2.

1		$\neg p \rightarrow (p \wedge q)$	P
2		$\neg q$	P
3		$\neg p$	A
4		$p \wedge q$	\rightarrow -B 1, 3
5		p	\wedge -B 4
6		$p \wedge \neg p$	\wedge -E 3, 5
7		p	\neg -B 3 - 6
8		$p \wedge \neg q$	\wedge -E 2,7

3.

1		p	P
2		$p \rightarrow (p \wedge r)$	P
3		$p \wedge r$	\rightarrow -B 1,2
4		r	\wedge -B 3
5		$r \vee s$	\vee -E

4.

1		$(p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge p)$	P
2		$\neg p$	A
3		$\neg p \vee q$	\vee -E 2
4			
		$p \wedge \neg q$	A
5		$\neg q$	\wedge -B 4
6		$\neg p$	\vee -B 3, 5
7		p	\wedge -B 4
8		$p \wedge \neg p$	\wedge -E 6, 7
9		$\neg(p \wedge \neg q)$	\neg -E 4 - 8
10		$\neg r \wedge p$	\vee -B 1, 9
11		p	\wedge -B 10
12		$p \wedge \neg p$	\wedge -E 2, 11
13		p	\neg -B 2 - 12

5.

1	$p \wedge q$	P
2	p	\wedge -B 1
3	q	\wedge -B 1
4	$\neg q$	A
5	$q \wedge \neg q$	\wedge -E 3, 4
6	$\neg \neg q$	\neg -E 4
7	$\neg p \vee \neg q$	A
8	$\neg p$	\vee -B 6, 7
9	$p \wedge \neg p$	\wedge -E 2, 8
10	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	\neg -E 7 - 9

6.

1	$p \vee q$	P
2	$\neg p \wedge \neg q$	A
3	$\neg p$	\wedge -B 2
4	q	\vee -B 1,3
5	$\neg q$	\wedge -B 2
6	$q \wedge \neg q$	\wedge -E 4,5
7	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	\neg -E 2 - 6

7.

1	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	P
2	$\neg p$	A
3	$\neg p \vee \neg q$	\vee -E 2
4	$(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)$	\wedge -E 1, 3
5	p	\neg -B 2 - 4
6	$\neg q$	A
7	$\neg p \vee \neg q$	\vee -E 6
8	$(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q)$	\wedge -E 1, 7
9	q	\neg -B 6 - 8
10	$p \wedge q$	\wedge -E 5, 9

8.

1	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	P
2	$\neg(p \vee q)$	A
3	p	A
4	$p \vee q$	\vee -E 3
5	$(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	\wedge -E 2,4
6	$\neg p$	\neg -E 3 - 5
7	q	A
8	$p \vee q$	\vee -E 7
9	$(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	\wedge -E 2,8
10	$\neg q$	\neg -E 7 - 9
11	$\neg p \wedge \neg q$	\wedge -E 6, 10
12	$(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)$	\wedge -E 1, 11
13	$p \vee q$	\neg -B 2 - 12

9.

1	$p \rightarrow q$	A
2	$\neg(\neg p \vee q)$	A
3	p	A
4	q	\rightarrow -B 1,3
5	$\neg p \vee q$	\vee -E 4
6	$(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee q)$	\wedge -E 2, 5
7	$\neg p$	\neg -E 3 - 6
8	$\neg p \vee q$	\vee -E 7
9	$(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \vee q)$	\wedge -E 2, 8
10	$\neg p \vee q$	\neg -B 2 - 9
11	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$	\rightarrow -E 1 - 10

10.

1	$\neg p \vee q$	A
2	p	A
3	$\neg p$	A
4	$p \wedge \neg p$	\wedge -E 2,3
5	$\neg\neg p$	\neg -E 3 - 4
6	q	\vee -B 1, 5
7	$p \rightarrow q$	\rightarrow -E 2 - 6
8	$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$	\rightarrow -E 1 - 7

3.1.2 Lösungen zu den Beispielen aus Abschnitt 2.1.1

1. $\neg Rjn \wedge \neg Rnj$ (falls der Satz sagen soll, dass sich die beiden *gegenseitig* nicht mögen); $\neg Rjj \wedge \neg Rnn$ (falls der Satz sagen soll, dass keiner der beiden sich *selbst* mag)

2. $Rjd \wedge Rdn$

3. $\forall x(Mx \rightarrow Rxj)$

4. $\neg \exists x(Kx \wedge Rxj \wedge \neg Rxn)$

5. $\forall x((Kx \wedge Mx) \rightarrow Rxd)$

6. $\exists x(Kx \wedge \forall y(My \rightarrow Rxy) \wedge Rxt)$

7. $\exists x(Kx \wedge \forall y \neg Rxy)$

8. $\forall x((Kx \wedge \exists y Rxy) \rightarrow Rxj)$

9. $\forall x((Mx \wedge \exists y(Ky \wedge Rxy)) \rightarrow \neg Rxn)$

10. $\forall x(Kx \rightarrow Rxd) \rightarrow \neg \exists x(Kx \wedge \neg Rxd)$

11. $\exists x(Mx \wedge \forall y(Ky \rightarrow Rxy)) \rightarrow \forall x(Kx \rightarrow \exists y(Ryx))$

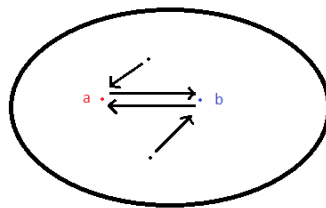
12. $\neg \exists x (Kx \wedge Rxx \wedge \neg Rxd)$

13. $\forall x (Mx \rightarrow Rxx)$

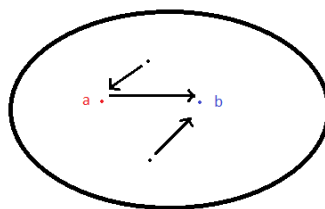
3.1.3 Lösungen zu den Beispielen aus Abschnitt 2.2.1

Gib für jeden Satz eine Interpretation an, in der er wahr ist und eine, in der er falsch ist.

1. $\forall x (Mxa \vee Mxb)$ (könnte etwa stehen für “Jeder mag Anton oder Berta”) ist wahr z.B. in diesem Modell:

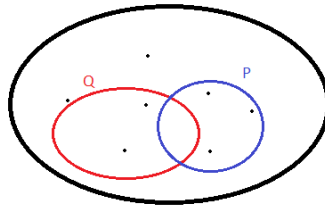


und falsch z.B. in diesem Modell

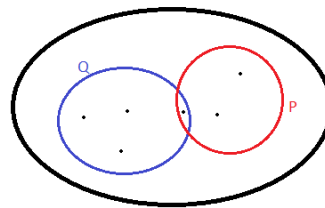


(weil Berta in diesem Modell keinen mag)

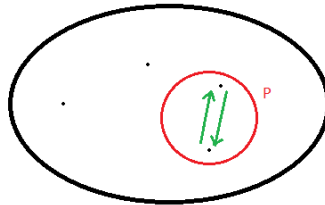
2. $\exists x(\neg Px \wedge \neg Qx)$ (könnte z.B. stehen für “Jemand ist weder Platon-Fan noch Quine-Fan”) ist wahr z.B. in diesem Modell:



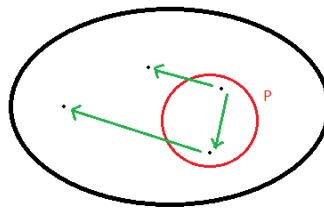
und falsch z.B. in diesem Modell



3. $\forall x(Px \rightarrow \exists y(Py \wedge Mxy))$ (könnte etwa stehen für “Jeder Philosoph mag irgendeinen Philosophen”) ist wahr z.B. in diesem Modell:

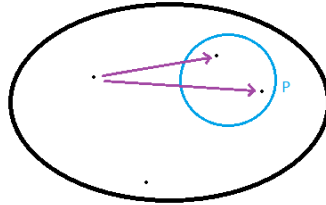


und falsch z.B. in diesem Modell

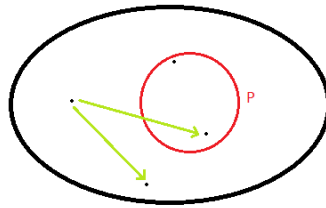


Hier gibt es einen Philosophen, der keinen Philosophen mag (der “untere” von den beiden Philosophen).

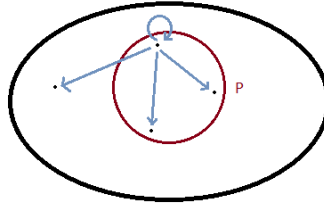
4. $\exists x \forall y (Py \rightarrow Mxy)$ (könnte etwa stehen für “Irgendjemand mag alle Philosophen”) ist wahr z.B. in diesem Modell:



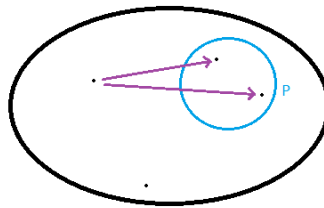
und falsch z.B. in diesem Modell



5. $\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow Mxy))$ (könnte etwa stehen für “Irgendein Philosoph mag alle Philosophen”) ist wahr z.B. in diesem Modell:



und falsch z.B. in diesem Modell

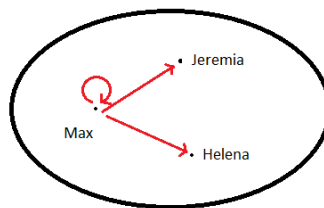


(Hier mag zwar irgendjemand alle Philosophen, aber dieser jemand ist keine Philosoph!)

6. siehe Folie S 76 ff.

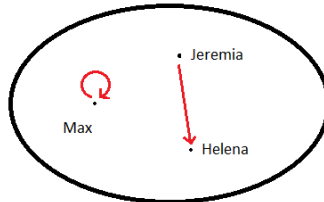
Welche der folgenden Sätze sind erfüllbar? (Begründe deine Entscheidung durch Angabe geeigneter Modelle, bzw. argumentiere informell, wieso der Satz nicht erfüllbar ist.)

7. $\exists x \forall y (\neg Myy \rightarrow Mxy)$ (könnte etwa stehen für “Jemand mag *alle*, die sich nicht selbst mögen”) ist wahr z.B. in diesem Modell:



In diesem Modell mag Max alle, die sich nicht selbst mögen - nämlich Jeremia und Helena. (Ausserdem noch nicht selbst.)

8. $\exists x \forall y (Mxy \rightarrow \neg Myy)$ (könnte etwa stehen für “Jemand mag *nur* Leute, die sich nicht selbst mögen”) ist wahr z.B. in diesem Modell:



In diesem Modell mag Jeremia nur Leute, die sich nicht selbst mögen (und keine anderen) - nämlich Helena.

9. $\exists x \forall y (Mxy \leftrightarrow \neg Myy)$ andererseits ist **nicht erfüllbar!** Keiner kann *alle* und *nur* solche Menschen mögen, die sich nicht selbst mögen. (Man erinnere sich an das **Russell Paradox** bzw. das **Paradox vom Barbier von Sevilla**, der alle und nur denen die Haare schneidet, die sich nicht selbst die Haare schneiden!)

Liste aller Definitionen

1	Definition	7
2	Definition	9
3	Definition	9
4	Definition	11
5	Definition	17
6	Definition	23
7	Definition	36
8	Definition	36
9	Definition	37
10	Definition	37
11	Definition	38
1	Satz	38
2	Satz	38
12	Definition	39
3	Satz	39
4	Satz	39
13	Definition	43
14	Definition	47
15	Definition	49
16	Definition	50
17	Definition	51